ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

(ab)c=a(bc) E=mc²

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 0 3 7

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания г. Москва, МГТУ им. Баумана.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	0	10	10	20	20	10					70	семьдесят	[illegible]

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 0 3 7

№1 Лист 1

1) Заметим, что угловая скорость в оборотах на мин. у минутной стрелки $w_1 = \frac{1}{60}$ об/мин, у часовой: $w_2 = \frac{1}{24\cdot 60}$ об/мин

2) В начальный момент времени между стрелками $\frac{1}{4}$ от оборота. Минутная стрелка догоняет часовую, т.е. их относ. скорость $w = w_1 - w_2$.

3) Составим уравнение $\frac{1}{4} = wt$, $\Rightarrow t_{(мин)} = \frac{1}{4w} = \frac{1}{4}\cdot\frac{24\cdot 60}{(24-1)} = \frac{360}{23} = 15\frac{15}{23}$ минут.

0

Ответ: $15\frac{15}{23}$ мин.

№3.

$\begin{cases} x+y = a-1 \\ xy = a^2-7a+14 \end{cases}$ $x^2+y^2 \to max$

10

1) Выразим из первых двух уравнений x^2+y^2:

$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow$

$x^2+y^2 = (a-1)^2 - 2a^2 + 14a - 28 = a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 14a - 28$

$= -a^2 + 12a - 27$ – заметим, что в левой части мы получили параболу с ветвями вниз, тем самым max значение будет при вершине.

$a_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{12}{-2} = 6 \Rightarrow \max = -36 + 12\cdot 6 - 27 = 9 = x^2+y^2$

$D \geq 0 \Rightarrow a=5$

Ответ: 9.

№2

$A = \sqrt{2017}$ и $\sqrt{2019}$
$B = 2\sqrt{2018}$ $\Rightarrow$ возведём A и B в квадрат:

$A^2 = (\sqrt{2017}+\sqrt{2019})^2 = 2017+2019+2\sqrt{2017}\sqrt{2019}$

$B^2 = 4\cdot 2018$

$A^2 \leq B^2$; $2\cdot 2018 + 2\sqrt{2017}\cdot\sqrt{2019} \leq 4\cdot 2018$; $2\sqrt{2017}\sqrt{2019} \leq 2\cdot 2018$;

$\sqrt{2017}\sqrt{2019} \leq 2018 \to$ возведём ещё раз в квадрат. получаем.

ШИФР | 4 | 4 | 0 | 3 | 7 |

лист 2

№ 2 продол.

$2017\cdot 2019 \lesseqgtr 2018^2$; $2017\cdot 2019 = 4072323$ $\Big|\Rightarrow$
$2018^2 = 4072324$
$2017\cdot 2019 < 2018^2 \Big|\Rightarrow$

$A < B$

10

Ответ: $A < B$

№ 5

$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$

Заметим, что $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ и $1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ — из триг тождества $\Big|\Rightarrow y=\sqrt{\sin^2 x}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$

* Проверять $1-\cos^2 x\geq 0$ и $1+ctg^2 x\geq 0$ — бессмысленно, т.к. это всегда выполняется, также и с $\sin^2 x\geq 0$

ОДЗ.
$\sin^2 x\neq 0$
$x\neq \pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$ — целым числам

$x^2-6x+9=(x-3)^2 \Rightarrow \sqrt{}$ $y=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$ — модульное выражение, причём выколоты точки по ОДЗ.

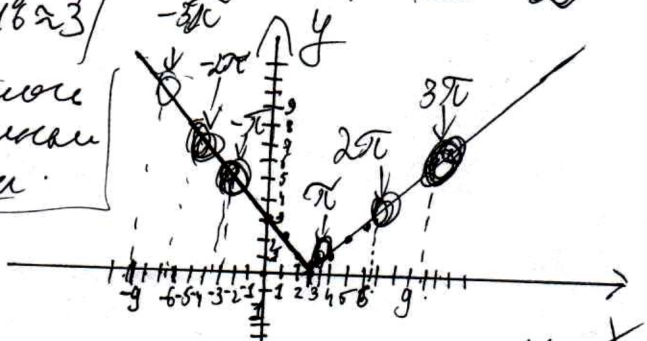
Строим график:

y	0	2	1	3	1	2	3	$\lvert\pi k-3\rvert$
x	3	1	2	0	4	5	6	πk

— для любых k — целых

$\pi\approx$ 3отрезка, т.к. $\pi\approx 3{,}1416\approx 3$

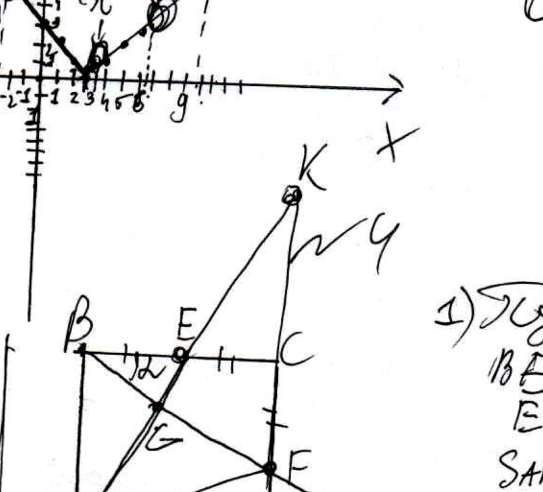
* извиняюсь за огромные точки.



20

Ответ: См график (и выкол. точки)

№ 4



Дано:
ABCD,
E — серед. BC
F — серед CD
$AE \cap BF = G$
$S_{GECF} \overset{?}{=} S_{AGF}$

1) Пусть $AB=a$, тогда $BE=EC=CF=FD=\frac{a}{2}$, т.к. E и F — середины сторон;
$S_{ABCD}=a^2$; $S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{4}a^2=S_{\triangle AFD}\Rightarrow S_{\triangle BFA}=\frac{1}{2}a^2$

2) Достроим AE и CD до пересеч в K, $\triangle EKC\sim\triangle AKD$ — по двум углам ($\angle D=\angle C=90^\circ$ и $\angle KAD=\angle KEC$ — соотв. углы.

лист 3

$\frac{EC}{AD}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{KC}{KD}=\frac{1}{2} \Rightarrow KC=a.$

3) th Менелая для △ FBC: $\frac{FK}{KC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BG}{GF}=1.$

$\frac{a+\frac{a}{2}}{a}\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\cdot\frac{BG}{GF}=\frac{3}{2}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{1}{1}=1 \Rightarrow \frac{BG}{GF}=\frac{2}{3};$

4) Достроим AD и BF до пересеч. в L: DL = a (см. 2 пункт, док-во аналог для △ FDL и ABL).

th Менелая для △ GKF: $\frac{FB}{BG}\cdot\frac{GE}{EK}\cdot\frac{KC}{CF}=1 \Rightarrow \frac{5}{2}\cdot\frac{GE}{EK}\cdot\frac{2}{1}=1$

$\Rightarrow \frac{GE}{EK}=\frac{1}{5}$; т.к. AE = EK (EC - сред лин △ AKD, т.к. EC ∥ AD), то EK = AG + GE $\Rightarrow \frac{GE}{GE+AG}=\frac{1}{5} \Rightarrow AG=\frac{4}{5}$

5) $S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}BF\cdot BC\cdot\sin\alpha$; $S_{\triangle BGE}=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot BG=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot\frac{2}{5}BF\cdot\sin\alpha=\frac{1}{5}S_{\triangle FBC}=\frac{1}{20}S_{ABCD}=\frac{1}{20}a^2.$

$\Rightarrow S_{GECF}=S_{\triangle FBC}-S_{\triangle BGE}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}a^2=\frac{4}{20}a^2$

20

6) $S_{\triangle AGF}=\frac{GF}{BF}\cdot S_{ABF}=\frac{3}{5}\cdot S_{ABF}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{10}a^2$
т.к. высоты равны.

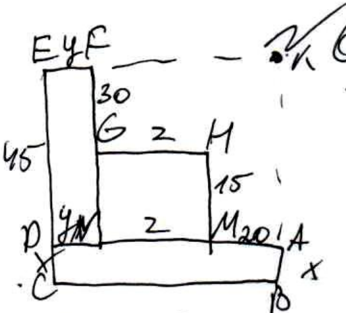
$\Rightarrow S_{\triangle AGF} > S_{GECF}$

Ответ: $S_{\triangle AGF} > S_{GECF}$

№6

S = 2100 кв.м
MA = 20м
GF = 30м
MH = 15м
GH ≥ 20м

BK - ? KE - ?
GH - ?



1) Заметим, что ограждение (его длина) есть периметр полевого лагеря. Стороны MA, HM, FG и ED фиксированы, GH - частично, известно, что GH ≥ 20м.

Попробуем оценить S EKCB: $S_1+S_2+S_{лаг}$

$S_{лаг}=2100м$; $S_1=30\cdot40=1200$, $S_2=20\cdot15=300$ $\Rightarrow S_{EKCB}=3600=60^2$ (min)

т.п. ограждения: значит стороны по 60; Но менее дело, где увеличен

GH - увелич и площадь, главное, что сумма BC и KB ≥ 120 значит и

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 44037

лист 4

2) Возьмём стороны так, чтобы $BK = KE = 60$, тогда $AB = 60 - 45 = 15$, и $EF = 60 - 40 = 20$, при $GH = 20$; Тогда $S_{GHNM} = 20 \cdot 15 = 300$; $S_{DNEF} = 45 \cdot 20 = 900$.

$S_{DCAB} = 60 \cdot 15 = 900$ $\Rightarrow$ $S_{GHNM} + S_{DNEF} + S_{DCAB} = 2100$ (+) Значит $\ell_{min}(P) = 60 + 60 + 15 + 30 + 20 + 20 + 20 + 30 + 15 + 15 = 240$ м, тем самым $BK = KE = 60$, а $GH = 20$. При значении BK и $KE = 65$ и 60 соответственно, тоже всё выполнено, только $EF = 15$; $AB = 15$; $GH = 30$; $\Rightarrow P = 60 + 65 + 30 + 15 + 20 + 30 + 15 + 15 = 250$ — это не минимально, и при $60 \cdot 65$ — площадь $EKCB$ — больше;

Значит $P_{min} = 240$ м и $BK = KE = 60$ и $GH = 20$ — при этих значениях будет мин длина

Ответ: мин длина: 240 м; $BK = KE = 60$ м; $GH = 20$ м

10

Док-во мин. периметра