ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

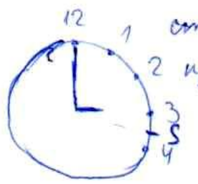
**ШИФР** 3 5 5 6 3

**Класс** 10 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 09.02.19

**Площадка написания** МГТУ им. Баумана

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ | | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Цифрой | Прописью | |
| Оценка | 5 | 10 | 10 | 20 | 20 | 10 | | | | | 75 | семьдесят пять | [illegible] |

№1. ~~Пу~~ Пусть скорость часовой стрелки $x$, тогда скорость минутной стрелки $12x$ (т.к. минутная стрелка проходит $360°$, когда часовая проходит $30°$).



Пусть $S$ – ~~минуты~~ ~~время, на котором минутная и часовая стрелки встретятся~~ расстояние в минутах, которое пройдет минутная стрелка до встречи с часовой.

$$\frac{S-15}{x}=\frac{S}{12x}$$

5

$$12S-180=S$$

$$S=\frac{180}{11}\approx 16,5 \text{ минут}$$

Ответ: 16,5 минут.

№2.

$A=\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$ $\quad B=2\sqrt{2018}$

$\sqrt{2017}+\sqrt{2019} \vee 2\sqrt{2018}$ т.к. оба числа положительны, то

$2017+2019+2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 4\cdot 2018$

$2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 2\cdot 2018$

$\sqrt{(2018-1)(2018+1)} \vee \sqrt{2018^2}$

10

$\sqrt{2018^2-1} < \sqrt{2018^2}$, значит, $A<B$

Ответ: $A<B$.

№3.

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases} + \begin{cases} x^2+2xy+y^2=a^2-2a+1 \\ -2xy=-2a^2+14a-28 \end{cases}$$

10 $\quad D \geq 0 \Rightarrow a=5$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27$ $\quad f(a)=-a^2+12a-27$ – квадратичная функция, график парабола, ветви вниз, значит, максимальное значение принимает в вершине.

$x^2+y^2=9$ - максимальное значение.

$a_в=\frac{-12}{-2}=6$ $\quad$ ~~f(a)~~ $f(a)=-36+2\cdot 36-27=36-27=9$

Ответ: при $a=6$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

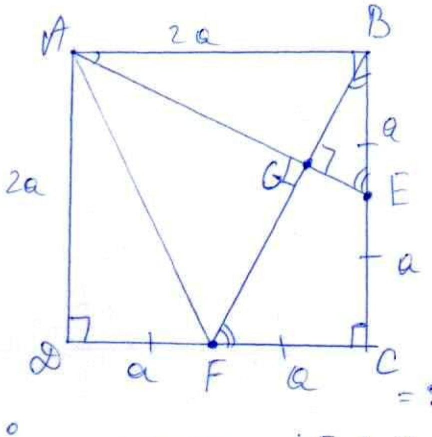
**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** 3 5 5 6 3

№4.

Дано:
ABCD - квадрат
~~E - середина~~
$E \in BC$; $BE = EC$
$F \in CD$; $CF = FD$
$AE \cap BF = G$
Сравнить: $S_{GECF}$ и $S_{\Delta AGF}$

Решение:




1. $\Delta ABE = \Delta BCF = \Delta ADF$ по 2 сторонам и $\angle$ между ними ($AB = BC = AD$ (стороны квадрата), $\angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $BE = CF = DF$ - по условию и т.к. ABCD - квадрат), значит, их площади равны и $\angle BAE = \angle CBF$, $\angle AEB = \angle BFC$.

2. Из п.1 $\angle BAE = \angle FBC$, а $\angle BAE + \angle AEB = 90°$, тогда в ~~тр~~ $\Delta BEG$, $\angle GBE + \angle GEB = 90°$ и $\angle BGE = 90°$, значит, $AE \perp BF$.

3. Пусть $BE = a$, тогда $BC = 2a = AB = CD = AD$.

4. $S_{GECF} = S_{\Delta BCF} - S_{\Delta BEG}$, $S_{\Delta AFG} = S_{\square ABCD} - 3 S_{\Delta ABE} + S_{\Delta BEG}$

5. $\Delta BEA$, $BG$ - высота. ~~Пусть $EG = x$~~ $\angle B = 90°$, значит, по теореме Пифагора $AE = a\sqrt{5}$. Пусть $EG = x$, тогда $AG = a\sqrt{5} - x$, в $\Delta ABG$ $\angle G = 90°$, $\Delta BEG$ $\angle G = 90°$, значит:

$$4a^2 - (a\sqrt{5} - x)^2 = a^2 - x^2$$
$$4a^2 - 5a^2 + 2\sqrt{5}ax - \cancel{x^2} = a^2 - \cancel{x^2}$$
$$2\sqrt{5}ax = 2a^2$$
$$x = \frac{a}{\sqrt{5}} = GE$$ ~~тогда $S_{BEG}$~~

6. По теореме Пифагора ($\Delta BEG$, $\angle G = 90°$) $BG^2 = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5}$; $BG = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

7. $S_{GECF} = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4a^2}{5}$

8. $S_{\Delta AGF} = 4a^2 - 3a^2 + \frac{a^2}{5} = \frac{6a^2}{5}$

9. $S_{GECF} < S_{\Delta AGF}$

Ответ: $S_{GECF} < S_{\Delta AGF}$.

20

№5.

$$y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$
$$y = \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} \cdot \sqrt{(x-3)^2} \quad \sin x \neq 0$$
$$y = |\sin x| \cdot \frac{1}{|\sin x|} \cdot |x - 3| \quad x \neq \pi k, k \in Z$$
$$y = |x - 3|$$

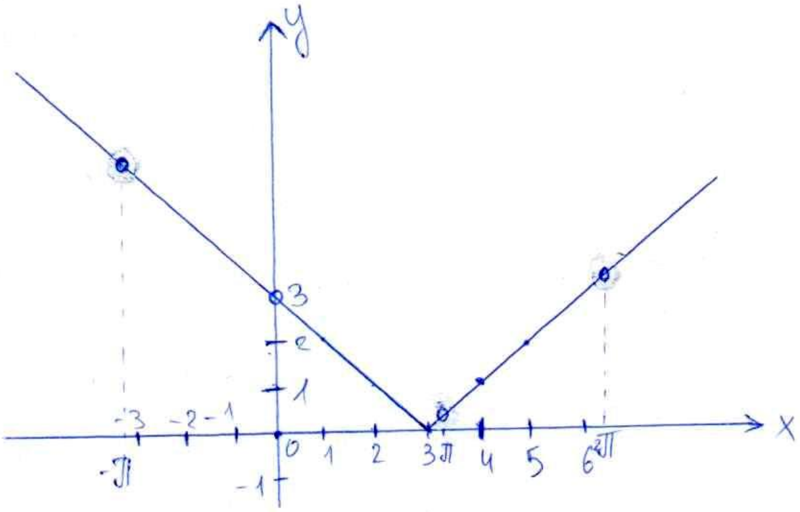
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

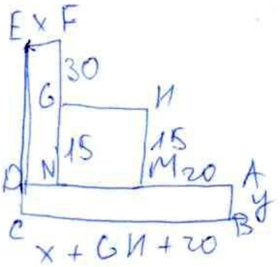
**ШИФР** 3 5 5 6 3




$x \neq \pi k, k \in Z.$

20

№6.




Пусть $EF = x$, $AB = y$.

$S = 45x + 15\,GH + y(x + GH + 20) = 2100$

$(45+y)x + 15\,GH + y(GH+20) = 2100$

$$x = \frac{2100 - 15\,GH - y(GH+20)}{45+y}$$

$P = 2x + 2y + 2\,GH + 130$ – длина забора

$$P = \frac{4200 - 30\,GH - 2GHy - 40y}{45+y} + 2y + 2\,GH + 130 =$$

$$= \frac{4200 - 30\,GH - \cancel{2GHy} - 40y + 90y + 2y^2 + 90\,GH + \cancel{2GHy}}{45+y} + 130 =$$

$$= \frac{4200 + 2y^2 + 60\,GH + 50y}{45+y} + 130$$

10

$\frac{4200+2y^2+60\,GH+50y}{45+y}$ достигает наименьшего значения при $GH = 20$. (т.к. $GH \geq 20$)

$$P = \frac{4200 + 2y^2 + 1200 + 50y}{45+y} + 130$$ – чтобы ~~выраж~~ $P$ было наименьшим

$\frac{4200+2y^2+1200+50y}{45+y}$ должно быть наименьшим

**ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!**

**ШИФР** | 3 | 5 | 5 | 6 | 3 |

Подбором находим у, находим P из S находим x.