ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

Класс 10 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 9.02.19

Площадка написания МГТУ им. Н.Э.Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	30					95	девяносто пять	Кир–

Задание 1

1) Пусть угловая скорость стрелки: ω

$\omega_м$ – угл. ск – минутной стрелки

$\omega_ч$ – угл ск – часовой стрелки.

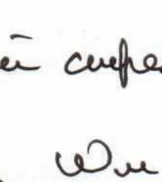
$\Rightarrow$ по опр $\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \omega_м = \frac{360^\circ}{60 \cdot 60} = \frac{1}{10}$ сек$^{-1}$

$$\omega_ч = \frac{\cancel{360^\circ}\,1}{\cancel{12 \cdot 60 \cdot 60}\,10} = \frac{1}{120} \text{ сек}^{-1}$$

$\Rightarrow$ по закону сложения угловых скоростей

$\omega_ч = \omega_м + \omega_{отн}$, где $\omega_{отн}$ – угл скорость минутной стрелки, относительно часовой.

$\Rightarrow \omega_{отн} = |\omega_ч - \omega_м| = \left|\frac{1}{120} - \frac{1}{10}\right| = \left|-\frac{11}{120}\right| = \frac{11}{120}$ сек$^{-1}$

2) начальное положение:  $\Delta\varphi = 90^\circ \Rightarrow \Delta\varphi = \omega_{отн} \cdot t$

$t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{отн}} = \frac{90^\circ \cdot 120}{11}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

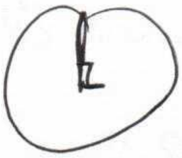
Задание 1

1) за 1час минутная стрелка „проходит" 360°, а часовая $\frac{1}{12}\cdot 360^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

заменим „условно" $\upsilon_{мин} = 360^\circ/сек$

$\upsilon_{час} = 30^\circ/сек$

$\Rightarrow$ за некоторое время t, часовая стрелка „пройдёт" $S = \upsilon_{час}\cdot t = 30t$, а т.к изначально



угол между часовой и минутной стрелками $90^\circ \Rightarrow$ минутная пройдёт $S' = S + 90^\circ = 360^\circ t$

$\Rightarrow \quad \cancel{30^\circ}t + \overset{3}{\cancel{90^\circ}} = \overset{12}{\cancel{360^\circ}}t$

$t + 3 = 12t$; $11t = 3$

$t = \frac{3}{11}$ часа

5

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{3}{11}$ часа.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

Задание 2

$A=\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$

$B=2\sqrt{2018}$

1) $A>0$, $B>0$ $\Rightarrow$ если $A>B \Rightarrow A^2>B^2$; если $A<B \Rightarrow A^2<B^2$

по св-у монотонных ф-ий, коей является $y=x^2$

2) $A^2=2017+2019+2\sqrt{2017\cdot2019}=2\cdot2018+2\sqrt{(2018-1)(2018+1)}=$

$=2\cdot2018+2\sqrt{2018^2-1}$

3) $B^2=4\cdot2018.$

4) Зачем разность $B^2-A^2=\overset{2}{\cancel{4}}\cdot2018\ \cancel{-2\cdot2018}-2\cdot\sqrt{2018^2-1}=$

$=2\cdot2018-2\cdot\sqrt{2018^2-1}$

10

т.к $y=\sqrt{x}$ - монотонно возрастает при $x>0$ $\Rightarrow$

$\sqrt{2018^2}>\sqrt{2018^2-1}$ таким образом

$2\cdot2018-2\cdot\sqrt{2018^2-1}>0 \Rightarrow B^2>A^2 \Rightarrow B>A$

Ответ: $B>A$

ШИФР | 4 | 1 | 2 | 5 | 8 |

Задача 3

$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} x^2+y^2+2xy=a^2-2a+1 \\ 2xy=2a^2-14a+28 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=a^2-2a+1-$
$-2a^2+14a-28 \Rightarrow$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27$ где $f(a)=-a^2+12a-27$ — кв-я ф-я; причём её гр-к — парабола а т.к $a'<0 \Rightarrow$ „ветви" — вниз $=$ ($a'=-1$) - (коэф. перед a^2)

(1С)

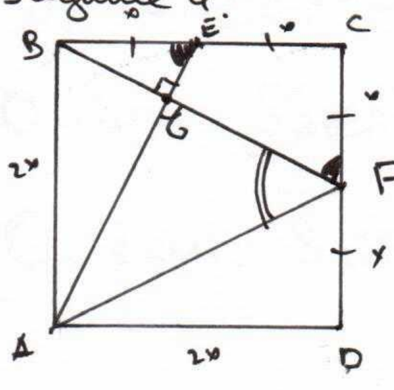
$\Rightarrow$ наибольшее значение она принимает в вершине, при $a=x_в$.

$x_в=\frac{-b}{2a'}=\frac{-12}{-2}=6 \Rightarrow y_в=-36+12\cdot6-27=9$ — наиб значение

Ответ: 6

$D \geq 0$
$\Rightarrow a=5.$

Задача 4



Дано:
ABCD — кв
E — сер BC
F — сер CD
$AE \cap BF = G$

$V(S_{GECF}; S_{AGF})$

Решение.

1) пусть $DF=x \Rightarrow DF=FC=CE=BE=x$ (т.к ABCD — кв $\Rightarrow BC=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}CD$)

$\Rightarrow$ т.к ABCD — кв $\Rightarrow BC=CD=AD=AB=2x$

2) $\triangle ABE=\triangle BCF$

1) $AB=BC$ (кв-т)
2) $\angle B=\angle C=90°$
3) $BE=CF=x$

$\triangle ABE=\triangle BCF \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BEA=\angle CFB$

~~ШКБЕ~~

3) $\triangle BGE \sim \triangle BCF$

1) $\angle BEA=\angle CFB$ (2)
2) $\angle CBF$ — общ

$\triangle BGE \sim \triangle BCF \Rightarrow \frac{BG}{BC}=\frac{GE}{CF}=\frac{BE}{BF} \Rightarrow$
($\angle BGE=\angle BCF=90°$)

$\Rightarrow \frac{BG}{BC}=\frac{BE}{BF}$, где по т. Пифагора в $\triangle$-е BFC: $BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{5}x$

4) $\frac{BG}{2x}=\frac{x}{\sqrt{5}\cdot x} \Rightarrow BG=\frac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BG}{BF}=\frac{2x}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}x}=\frac{2}{5}$

5) $\angle CBF$ — общ $\Rightarrow \frac{S_{BGE}}{S_{BFC}}=$

$=\frac{BG\cdot BE}{BC\cdot BF}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

где $S_{BFC}=\frac{1}{2}2x\cdot x=x^2$

$\Rightarrow S_{BGE}=\frac{1}{5}x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{GECF}=S_{BCF}-S_{BGE}=x^2-\frac{1}{5}x^2=$

$=\boxed{\frac{4}{5}x^2}$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 1 | 2 | 5 | 8 |

6) ~~[illegible]~~

$$\frac{BG}{BF}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BF-GF}{BF}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{GF}{BF}=\frac{3}{5}$$

7) $S_{\triangle BFC}=S_{\triangle ADF}=x^2\ (5) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle BFA}=S_{ABCD}-2S_{\triangle BFC}=4x^2-2x^2=2x^2$

8) $\angle BFA$ - общий $\Rightarrow \dfrac{S_{GFA}}{S_{BFA}}=\dfrac{GF\cdot \cancel{AF}}{BF\cdot \cancel{AF}}=\dfrac{3}{5} \Rightarrow$

20

$\Rightarrow S_{GFA}=\dfrac{3}{5}S_{BFA}=\dfrac{3}{5}\cdot 2x^2=\dfrac{6x^2}{5}.$

9) $\cancel{S_{GFA}=6\left(\frac{x^2}{5}\right)=6S_{BGE}}$, $S_{GFA}=1,5\cdot\dfrac{4}{5}x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{GFA}=1,5\,S_{GECF}$

Ответ: ~~S_{GFA} в 6 раз больше S_{BGE}~~

Ответ: S_{GFA} в 1,5 раз больше S_{GECF}

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

Задание 5

$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$, $1-\cos^2 x \geq 0 \ \forall x \in R$, $1+ctg^2 x > 0 \ \forall x \in R$.

по ОТТ: $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow 1-\cos^2 x=\sin^2 x$.

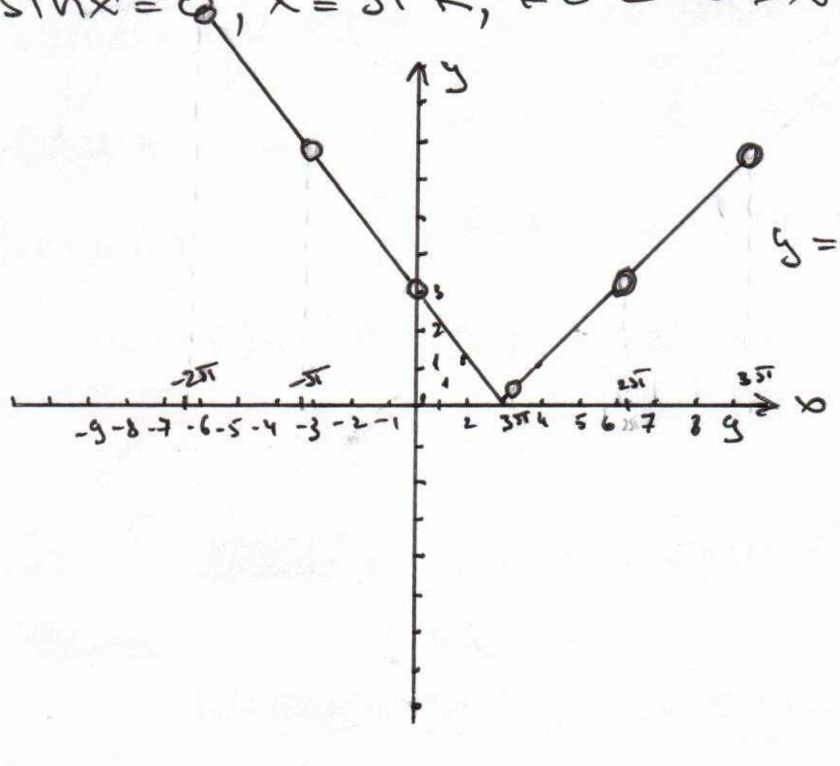
из ОТТ: $\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow 1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\sqrt{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$, $D_f=R\setminus\{\sin x=0\}$

$\begin{cases} y=\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|, \\ \sin x\neq 0 \end{cases}$

1) $y=|x-3|$ – модульная ф-ия, получена из гр-ка ф-ии $y=|x|$ – (модульная ф-я, гр-к – угол) смещением на 3ед →

2) $\sin x=0$, $x=\pi k$, $k\in Z \Rightarrow x\neq\pi k$, $k\in Z$



20

$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$.

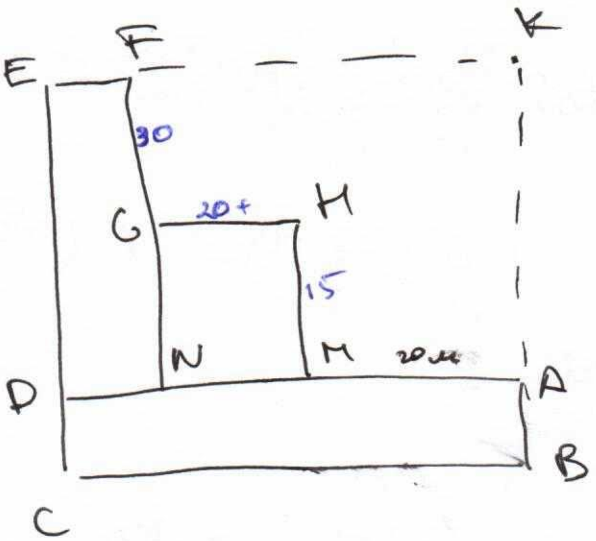
3,14
3
9,42

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

Задание 6.



Дано:
$S = 2100 м^2$
$MA = 20 м$
$GF = 30 м$
$MH = 15 м$
$GK \geq 20 м$

P_{min} - ?
BK, KE, GK - ?

Решение.

1) $P = CB + BA + MA + HM + GK + GF + EF + ED + CD =$

где $ED = FN = FG + GN = FG + HM = 45$

$CB = EF + NA = EF + GK + MA = 20 + EF + GK$.

$= 20 + EF + GK + AB + 20 + 15 + GK + 30 + EF + 45 + CD =$

$= 130 + EF + 2GK + AB + EF + CD = 130 + 2GK + 2AB + EF$

2) $S = 2100 = GK \cdot HM + EF \cdot ED + AB \cdot AD = GK \cdot 15 + EF \cdot 45 + AB \cdot (EF + GK + 20)$

$= 15 \cdot GK + 45 \cdot EF + AB \cdot (EF + GK + 20)$

1) $S_{MAKFGH} = S_{NFKA} - S_{NGHM} = FN \cdot NA - HM \cdot GK =$

$= \overset{45}{(30+15)} \cdot (GK + 20) - 15 \cdot GK = 45GK + 900 - 15GK =$

$= 900 + 30GK$, $GK \geq 20 м \Rightarrow S_{MAKFGH} \geq 1500$

2) $\overset{2100 м^2}{S}$ = $S_{BKEC} - S_{MAKFGH}$;
$S_{BKEC} = BK \cdot KE$

$BK \cdot KE \geq 3600$.

$BK \cdot KE = S + S_{MAKFGH} \geq 2100 + 840 = 2940 м^2$.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 1 2 5 8

~~$= 5 \cdot BK \cdot KE = \ldots 3000 + 30x$~~

3) $P = (EF + GK + MA) + (FG + KM + AB) + CB + EC =$

$EF + GK + MA = CB = EK$, $FG + KM + AB = KB$.

$= 2(KB + EK)$ т.о. KB и EK – минимальные, а т.к. KB и EK.

4)

$(BK \cdot KE)_{min} =$ ~~$3000 + 600 = 3600$~~ $м^2$ при $GK = 20$ м

$2100 + 1500 = 3600\ м^2$.

$\Rightarrow$ пусть $BK = \frac{3600}{KE}$ ($KE \neq 0$ по усл.) тогда.

5)

$KE + BK = min = KE + \frac{3600}{KE} = f(KE)$

$f'(KE) = \left(KE + \frac{3600}{KE}\right)' = 1 - \frac{3600}{KE^2} = 0.$ 30

(производная)

$\frac{KE^2 - 3600}{KE^2} = 0.$

$\Rightarrow$ при $KE = 60$; $KE + BK$ – мин.

но т.к. $KE \cdot BK = 3600 \Rightarrow KE = BK = 60. \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{min} = 2(KE + BK) = 240$ м

Ответ: 240; 60; 60; 20. ($KE = BK = 60$ м) ($GK = 20$ м)