ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 5 0 8

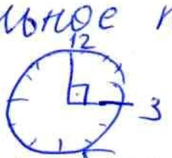
Класс 10 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Н.Э.Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	15	20	10					70	семьдесят	Кем

№1. Лист №1 из 7

Обозначим скорость (угловую) минутной стрелки $\omega_м = 1$ (об/час), а скорость часовой стрелки $\omega_ч = \frac{1}{12}$ (об./час)

Тогда начальное положение минутной $S_м = 0$, а начальное полож. часовой - $S_ч = \frac{1}{4}$ (об.) (т.к. 3 часа - ), тогда путь, кот. пройдет минутная будет равен пути, который пройдет ~~начальна~~ часовая с учетом начального положения.

t - время искомое (ч).

$\omega_м t + S_м = \omega_ч t + S_ч \Rightarrow$ т.к. $S_м = 0$, то

$\omega_м t = \omega_ч t + S_ч$

$t(\omega_м - \omega_ч) = S_ч$

$t = \frac{S_ч}{\omega_м - \omega_ч}$

$t = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{1}{4\left(\frac{12-1}{12}\right)} = \frac{12}{4 \cdot 11} = \frac{12}{44} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$ (ч).

5

Ответ: $\frac{3}{11}$ ч.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

Лист 2 из 7

ШИФР 3 5 5 0 8

№ 3

$$\begin{cases} x+y=a-1 & (1) \\ xy=a^2-7a+14 & (2) \end{cases}$$

Преобразуем (1): $(x+y)^2=(a-1)^2$

$x^2+2xy+y^2=a^2-2a+1$ (3)

Преобразуем (2): ~~x*y~~ $2\cdot(xy)=2(a^2-7a+14)$

$2xy=2a^2-14a+28$ (4)

Из рав-ва (3) вычтем рав-во (4):

$(x^2+2xy+y^2)-(2xy)=(a^2-2a+1)-(2a^2-14a+28)$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27$

10

Рассм. правую часть рав-ва как функцию $f(a)$

$f(a)=-a^2+12a-27$, - парабола; „ветви" вниз т.к $A<0$.

Найдем вершину $f(a)$:

$D\geq0 \Rightarrow a=5$.

$a_B=\frac{-12}{-2}=6 \Rightarrow x^2+y^2=-a^2+12a-27$

принимает макс. значение при $a=a_B=6$.

Ответ: 6

№ 2

$A=\sqrt{2017}+\sqrt{2019}$, $B=2\sqrt{2018}$.

10

Возведем обе части в квадрат.

$A^2=(\sqrt{2017}+\sqrt{2019})^2$; $B^2=(\sqrt{2018}+\sqrt{2018})^2$

$A^2=2017+2\sqrt{2017\cdot2019}+2019$; $B^2=2018+2\sqrt{2018\cdot2018}+2018$

$A^2=4036+2\sqrt{2017\cdot2019}$, $B^2=4036+2\sqrt{2018\cdot2018}$

Не нарушая общности рассуждения рассмотрим разность A^2-B^2

$A^2-B^2=4036+2\sqrt{2017\cdot2019}-4036-2\sqrt{2018\cdot2018}=$

$=2(\sqrt{4072323}-\sqrt{4072324})$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 5 0 8

№2 (продолж.)

т.к. $4072324 > 4072323$, то по свойству неравенств:

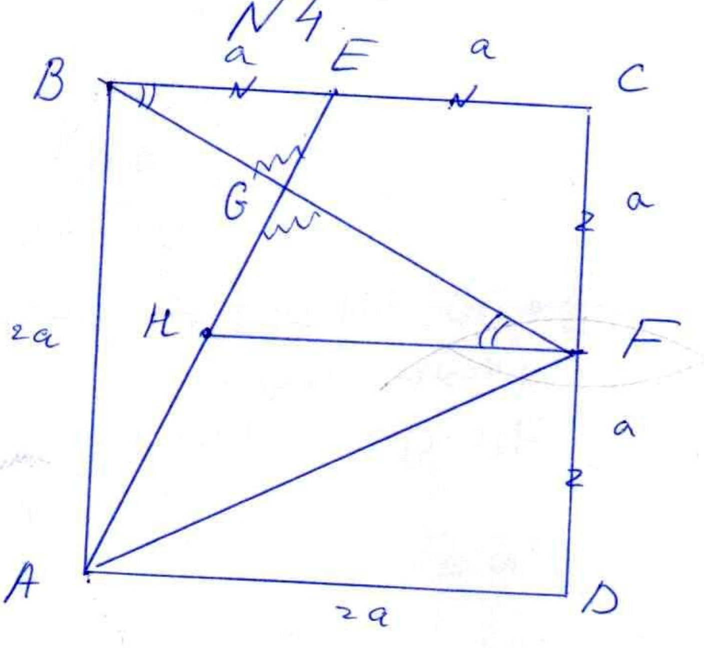
$$\sqrt{4072324} > \sqrt{4072323} \Rightarrow$$

$$A^2 - B^2 = 2(\sqrt{4072323} - \sqrt{4072324}) < 0 \Rightarrow$$

$A^2 - B^2 < 0$, значит $A^2 < B^2 \Rightarrow A < B$

Ответ: $A < B$

№4



1) т.к $ABCD$ - квадрат, то $AB = BC = CD = DA$.
т.к. $BE = EC$
$CF = FD$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow BE = EC = CF = FD$.

2) Обозначим сторону квадрата за $\underline{2a}$, тогда S - площадь квадрата $S = 4a^2$

3) Проведем FH: $H \in EA$; $FH \parallel BC \parallel AD$

4) т.к. $CF = FD$, ~~то~~ и $FH \parallel BC \parallel AD$, то в трапеции $AECD$: FH - ср. линия $\Rightarrow FH = \frac{EC + AD}{2} = \frac{a + 2a}{2} = \frac{3}{2}a$

5) рассм. $\triangle BGE$ и $\triangle GHF$:

№4 (продолж):

$\angle BGE = \angle HGF$ как вертикальные

т.к. $HF \parallel BC$, то $\angle EBF = \angle HFB$ как накрестлеж. при параллельных HF и BC и секущ. BF. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BGE \sim \triangle HFG$ по двум углам

Из подобие $\Rightarrow \frac{EG}{GH} = \frac{BE}{FH} \Rightarrow \frac{EG}{GH} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow GH = \frac{3}{2}EG$; $\frac{BG}{GF} = \frac{BE}{HF} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} \Rightarrow \boxed{GF = \frac{3}{2}BG.}$ (1)

6) т.к. FH – ср линие трапеции, то $AH = HE \Rightarrow$

$GH + EG = HA.$

$\frac{3}{2}EG + EG = \frac{1}{2}AE$

$\frac{5}{2}EG = \frac{1}{2}AE$

$\boxed{EG = \frac{1}{5}AE}$ V

7) ~~Рассм. BFC: $S_{BFC} = \frac{1}{2}BC \cdot CF = \frac{1}{2}2a \cdot a = a^2 = \frac{1}{4}S$.~~

рассм $ECDA$: (трапеция)

$S_{ECDA} = CD \cdot \frac{(EC+AD)}{2} = CD \cdot HF = 2a \cdot \frac{3}{2}a = 3a^2$

Рассм $\triangle ADF$:

$S_{ADF} = \frac{1}{2}FD \cdot AD = \frac{1}{2}2a \cdot a = a^2.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AECF} = S_{ECDA} - S_{\triangle DF} = 3a^2 - a^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{S_{AECF} = 2a^2}$ [6]

8) Рассм $\triangle BFC$: $S_{BFC} = \frac{1}{2}BC \cdot CF = \frac{1}{2}2a \cdot a = a^2$ [5]

т.к у $\triangle FCB$ и $\triangle GBE$ угол $\angle B$ – общий, то по св-ву площадей:

$\frac{S_{BEG}}{S_{BFC}} = \frac{BE \cdot BG}{BC \cdot BF}$ [4], где BF по т. Пифагора в прямоуг. $\triangle BFC$: $BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$ [2]

Из рав-ва (1) $\Rightarrow GF = \frac{3}{2}BG \Rightarrow BG = \frac{2}{5}BF \Rightarrow$

$BG = \frac{2}{5} \cdot a\sqrt{5} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ [3] V

Подставим [3] и [2] в [4]:

N4 (продолж.)

$\frac{S_{BEG}}{S_{BFC}} = \frac{a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}}}{2a \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{2a^2 \cdot 5} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$S_{BGE} = \frac{1}{5} S_{BFC} = \frac{1}{5} \cdot a^2 = \frac{a^2}{5}$ (согласно равенству [5].) $\Rightarrow$

$S_{EGFC} = S_{BCF} - S_{BGE} = a^2 - \frac{a^2}{5} = \frac{4}{5}a^2$?

$\boxed{S_{EGFC} = \frac{4}{5}a^2}$ [7]

9) $S_{AGF} = S_{AECF} - S_{GECF}$ $\Rightarrow$

Из равенств [6] и [7] $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AGF} = 2a^2 - \frac{4}{5}a^2 = \frac{6}{4}a^2 \Rightarrow$

$\boxed{S_{AGF} = \frac{6}{4}a^2}$ [8]

15

10) из равенств [7] и [8] $\Rightarrow$

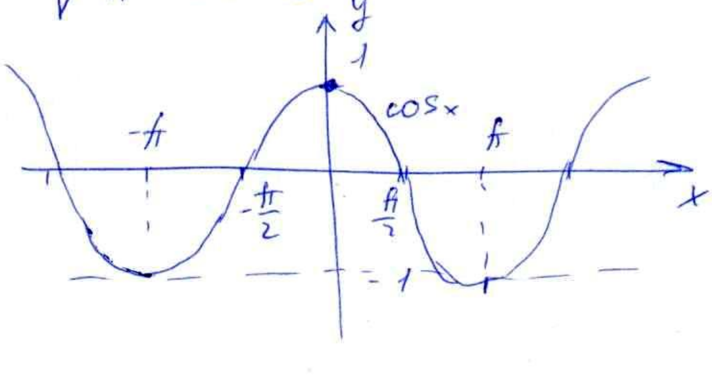
$\frac{S_{EGFC}}{S_{AGF}} = \frac{\frac{4}{5}a^2}{\frac{6}{4}a^2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$.

Ответ: $\frac{8}{15}$.

N5.

$y = \sqrt{1-\cos_x^2} \cdot \sqrt{1+ctg_x^2} \cdot \sqrt{x^2-6x+9}$

$y = \sqrt{\sin_x^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin_x^2}} \cdot \sqrt{x^2-6x+9}$



ОДЗ: 1) $1-\cos_x^2 \geq 0$.

$1 \geq \cos_x^2$

$1 \geq \cos x$

$x \in R$

2) ~~$\sin_x$~~

$1+ctg_x^2 \geq 0$

$1 \geq -ctg_x^2$

$x \in R$

3) $x \in R \setminus \{\pi n\}$. из $\frac{1}{\sin_x^2}$, где $n \in Z$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 5 5 0 8. Лист 6 из 7.

№5 (продолж)

$$y = \sqrt{\frac{\sin x^2}{\sin x^2}} \cdot \sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{\frac{\sin x^2}{\sin x^2}} \cdot \sqrt{(x-3)^2} =$$

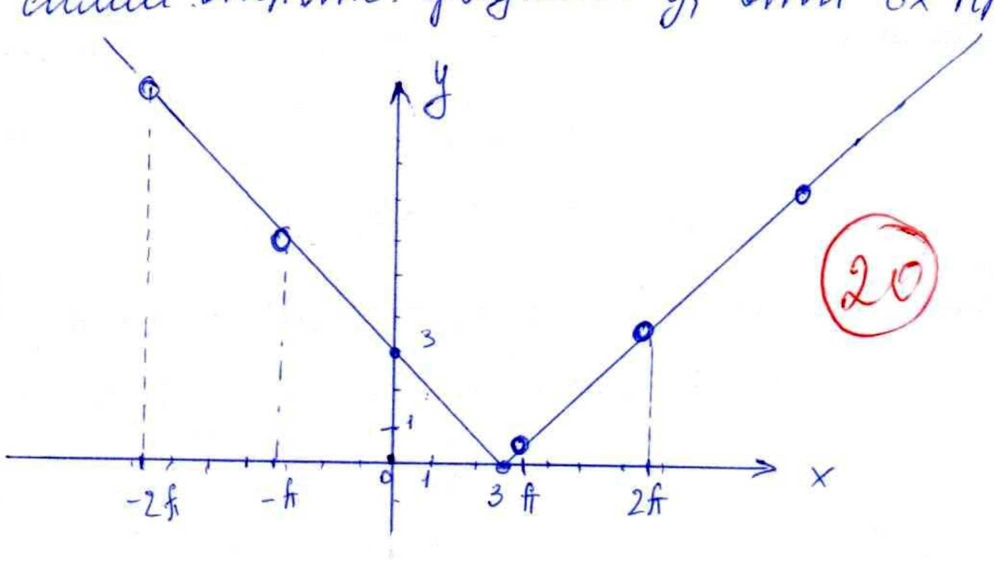
$$= \sqrt{\frac{\sin x^2}{\sin^2 x}} \cdot |x-3|.$$

$y_1 = x-3$

~~$y_2 = |x-3|$~~

$y_2 = |y_1|$ - симм. отраж. графин. y_1 отн ох при $y<0$

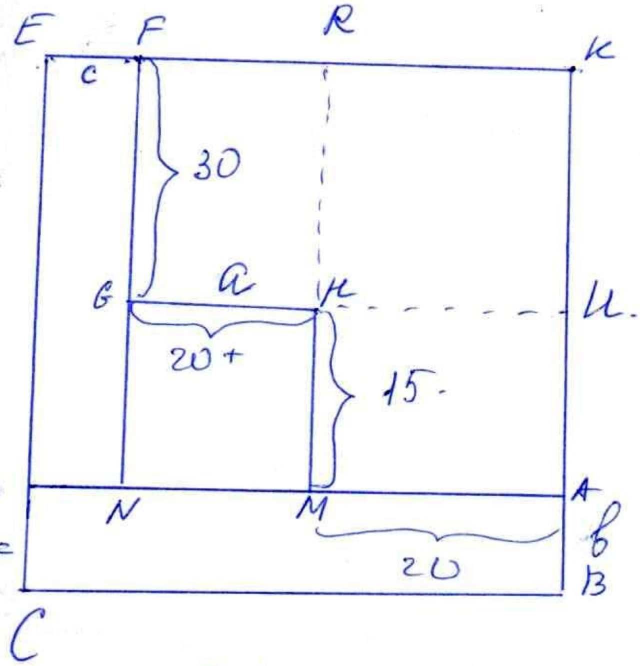
Ответ:



20

№6.

1) Обозначим $GH = a$,
$a \geq 20$ (по усл.)
$AB = b$
$EF = c$



2) По условию $S_{EFND} + S_{ABCD} + S_{GHMN} = 2100\ (м^2)$, тогда

$S_{EFND} = EF \cdot ED = EF(FG + HM) = c \cdot (30+15) = 45c.$

$S_{GHMN} = GH \cdot HM = a \cdot 15.$

$S_{ABCD} = AB \cdot DA = AB(EF + NM + MA) = b(c+a+20)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 3 | 5 | 5 | 0 | 8 | Лист №7 из 7

№6 (продолж)

Рассмотрим незадействованную часть FGHMAK:

$S_{FGHMAK} = AM \cdot HM + HR \cdot HU + HR \cdot GH = 20 \cdot 15 + 20 \cdot 30 + 30a =$

$= 900 + 30a$

$a = 20$ т.к. периметр минимален при максимальной площади FGHMAK $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = a_{min} = 20$ (по усл.); $a = GH$

$S(CEKB) = 2100 + 900 + 20 \cdot 30 = 3600 \ (м^2)$

Получается, что периметр ~~ECBAM~~ будет минимален, когда ECBK - квадрат $\Rightarrow$ почему?

$EC = KB = \sqrt{3600} = 60$ м $\Rightarrow$

Минимальная длина ограды: (периметр):

$(EF + GH + MA) + (BA + MH + GF) + EC + CB =$

$= EC + KB + EK + CB = 4EC = 4 \cdot 60 = 240$ (м)

10

Ответ: Минимальный периметр: 240 (м)

$EK = KB = 60$ м

$GH = 20$м