ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 7 7 2

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	6	20	7					63	шестьдесят три балла	

№2

$(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x \le 62$

$(4-\sqrt{15})^x (4+\sqrt{15})^x = (16-15)^x = 1$

Тогда $(4-\sqrt{15})^x = \frac{1}{(4+\sqrt{15})^x}$

$\frac{1}{(4+\sqrt{15})^x} + (4+\sqrt{15})^x \le 62$

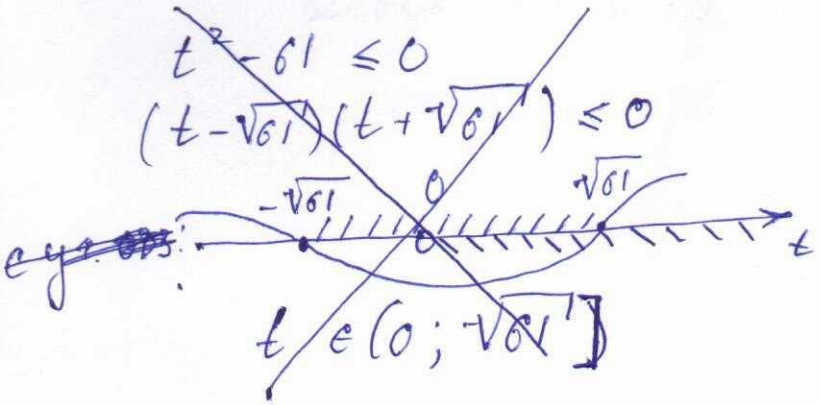
Введем переменную $t = (4+\sqrt{15})^x$, $t > 0$

$\frac{1}{t} + t \le 62$, домножим на t, т.к. $t \neq 0$

$1 + t^2 - 62t \le 0$

$t^2 - 61 \le 0$

$(t-\sqrt{61})(t+\sqrt{61}) \le 0$



$t \in (0; \sqrt{61}]$

~~$0 < t \le \sqrt{61}$~~

$t^2 - 62t + 1 \le 0$

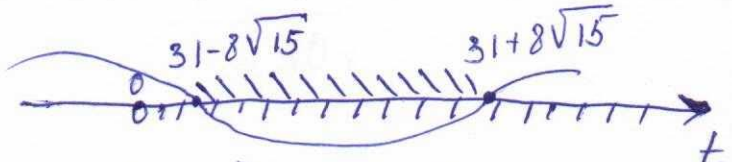
$t^2 - 62t + 1 = 0$

$D = 62^2 - 4 = (62-2)(62+2) = 60 \cdot 64$

$t_1 = \frac{62 - 8\sqrt{60}}{2} = 31 - 4\sqrt{60} = 31 - 8\sqrt{15}$

$t_2 = \frac{62 + 8\sqrt{60}}{2} = 31 + 8\sqrt{15}$

$(t - 31 + 8\sqrt{15})(t - 31 - 8\sqrt{15}) \le 0$



$t \in [31 - 8\sqrt{15}; 31 + 8\sqrt{15}]$

Получаем:

$$\begin{cases} 31 - 8\sqrt{15} \le (4 + \sqrt{15})^x \le 31 + 8\sqrt{15} \\ 31 - 8\sqrt{15} \le (4 - \sqrt{15})^x \le 31 + 8\sqrt{15} \end{cases}$$

Откуда $x \in [-2; 2]$

Ответ: $x \in [-2; 2]$

(+)

№1

$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ (*)

$f(x)=x^4-4x^3+12x^2-24x+24$ - исследуем функцию.

$f'(x)=4x^3-12x^2+24x-24$

$4x^3-12x^2+24x-24=0 \quad /\frac{1}{4}$

$x^3-3x^2+6x-6=0$ (1)

~~$x=4$ - один из корней ур-ния (1)~~

$x^3-3x^2+6x-6 \;|\; x-4$

$-x^3-4x^2 \qquad x^2+x$

x^2+6x

$-4x^2-4x$

$10x$

$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$

$(x^4-4x^3+4x^2)+(8x^2-24x+24)=0$

$(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=0$

Выр-ние $(x^2-2x)^2 \geq 0$

Выр-ние $8(x^2-3x+3)>0$ т.к. при рассмотрении ур-ния $x^2-3x+3=0 \quad D=9-12<0 \Rightarrow$

$x^2-3x+3>0 \Rightarrow 8(x^2-3x+3)>0$ (+)

При сложении 2^x чисел, одно из которых ≥ 0, другое >0 ноль получиться не может $\Rightarrow x^4-4x^3+12x^2-24x+24\neq 0$, а ур-ние $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ не имеет действ. решений. ч.т.д.

№3

$y = \sin^2 x$

$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x;$

$y'' = 2\cos 2x;\ y''' = -2^2 \sin 2x;\ y'''' = -2^3 \cos 2x;\ y^{(5)} = 2^4 \sin 2x;$

$y^{(6)} = 2^5 \cos 2x;\ y^{(7)} = -2^6 \sin 2x$ ....

Мы видим, что ~~производная четная степени производной~~ четного порядка даст нам $2^k \cdot \cos 2x$ или $-2^k \cos 2x$. Очевидно, что коэф. перед x останется 2, а т.к. 2019 - число нечетное, то производная будет содержать в себе ~~sin~~ ф-цию $\sin 2x$. Также заметим, что степень 2 перед ф-цией равна $(n-1)$, где n - ~~степень~~ порядок производной. Значит, производная будет либо 2^{2018}, ~~sin x~~, либо $-2^{2018} \sin 2x$. Теперь заметим, что каждая ~~четвертая степень~~ ~~производной~~ четвертая ~~степень~~ производной, начиная с 3-го порядка имеет коэф. (-1). Значит, если ~~2019 порядок~~ производная 2019-го порядка имеет коэф. (-1), то 2019 - 3 должно делиться на 4. Так и есть, ведь $2016 : 4$.

$y^{(2019)} = -2^{2018} \sin 2x$

Ответ: $y^{(2019)} = -2^{2018} \sin 2x$ (+)

№6

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 & (1) \\ x^2+xz+z^2=9 & (2) \\ y^2+yz+z^2=36 & (3) \end{cases} \qquad x>0,\ y>0,\ z>0$$

Из (1) решим отн. x:

$$D = y^2-4(y^2-4) = -3y^2+16$$

$$x_1 = \frac{-y+\sqrt{16-3y^2}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-y-\sqrt{16-3y^2}}{2}$$ очевидно, что $x_2<0 \Rightarrow$ можно его не рассматривать

Подставим x_1 в (2)

$$\left(\frac{-y+\sqrt{16-3y^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{-y+\sqrt{16-3y^2}}{2}\right)z+z^2=9 \quad (4)$$

(3) решим отн. z:

$$D = y^2-4(y^2-36) = -3y^2+144 \rightarrow \text{выбор решения } z_i - ?$$

$$z = \frac{-y+\sqrt{144-3y^2}}{2}$$ подставим в (4)

$$\left(\frac{-y+\sqrt{16-3y^2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{16-3y^2}-y}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{144-3y^2}-y}{2}\right)+$$

$$+\left(\frac{-y+\sqrt{144-3y^2}}{2}\right)^2=9$$

$$\frac{y^2+16-3y^2-2y\sqrt{16-3y^2}}{4}+\frac{144-3y^2+y^2-2y\sqrt{144-3y^2}}{4}+$$

$$+\frac{\sqrt{(16-3y^2)(144-3y^2)}-y\sqrt{16-3y^2}-y\sqrt{144-3y^2}+y^2}{4}=9$$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 5 7 7 2

Домножим на 4.

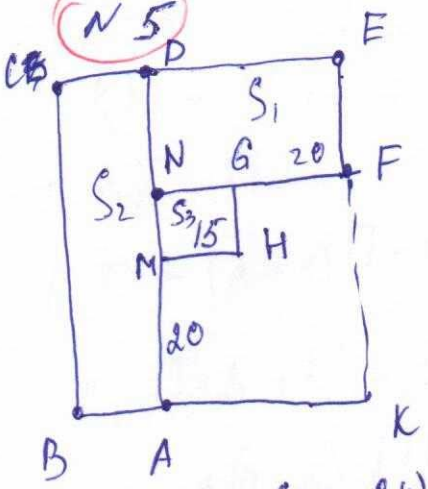
$$-2y^2+16-2y\sqrt{16-3y^2}+144-2y^2-2y\sqrt{144-3y^2}+$$
$$+\sqrt{16\cdot144+9y^4-16\cdot3y^2-144\cdot3y^2}-y\sqrt{16-3y^2}-y\sqrt{144-3y^2}+y^2=9$$

$$160-3y^2-3y\left(\sqrt{16-3y^2}+\sqrt{144-3y^2}\right)+\sqrt{24^2-3y^2\cdot160+9y^4}=36$$

$$3y^2+3y\left(\sqrt{16-3y^2}+\sqrt{144-3y^2}\right)=\sqrt{24^2-3y^2\cdot160+9y^4}+124$$

Далее?... (7)

(N 5)



$EF = EK - (20 + GH)$

$S_1 + S_2 + S_3 = 1600$

$S_1 = EF \cdot 35$

$S_2 = (BK - 35)(20 + GH + EF)$

$S_3 = 15\,GH$

$35EF + 20BK + GH \cdot BK + BK \cdot EF - 700 - 35\,GH - 35E$

$+15\,GH = 20BK + GH \cdot BK + BK \cdot EF - 700 - 20\,GH = 160$

$20BK + GH \cdot BK + BK \cdot EF - 20GH = 2300$

$BK(20 + GH + EK - 20 - GH) - 20\,GH = 2300$

$BK \cdot EK = 2300 + 20\,GH$

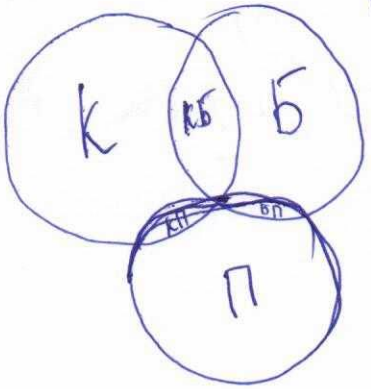
$2BK + 2EK \to min$?

по нер. Коши

$BK + EK \geq 2\sqrt{2300 + 20\,GH}$

(См. далее на др.)

(N 4)



$$\begin{cases} К+Б+П+КБ+БП+КП=32 \\ КП+БП+П=2(КБ+БП+Б) \\ КБ+КП+К=2(КП+БП+П) \\ КП+КБ+БП=КП+БП+2+П \end{cases}$$

$$\begin{cases} К+Б+П=32-(КБ+БП+КП) \\ КП+БП+П=2КБ+2БП+2Б \\ КБ=П+2 \\ КБ+КП+К=КП+БП+П \end{cases}$$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 5 | 7 | 7 | 2 |

$$\begin{cases} К+Б+П = 32-(КБ+БП+КП) \\ КП+П = 2КБ+БП+Б \\ КБ = П+2 \\ К+КБ = nП+nБП+(n-1)КП \end{cases}$$

$$\begin{cases} К+Б+П = 32-(КБ+БП+КП) \\ КП+П = 2(П+2)+БП+Б \\ К+П+2 = (n-1)П+n(БП)+(n-1)КП \\ КБ = П+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} К+Б+П = 32-(КБ+БП+КП) \\ КП = П+4+Б+БП \Rightarrow П+Б = КП-БП-4 \\ КБ = П+2 \\ К = (n-1)П+n(БП)+(n-1)КП-2 \end{cases}$$

$(КБ-2)$

$2(П+Б+К) = 32-(КБ+БП+КП)+КП-БП-4+(n-1)+nБП+$

$+(n-1)КП-2$

$2(П+Б+К) = 26-КБ-2БП-КП+КП+(n-1)(КБ-2)+nБП+n-1КП$

$2(П+Б+К) = 26+(n-2)КБ-2n+2+(n-2)БП+(n-1)КП$

$П+Б+К = 13-\left(\frac{n}{2}-1\right)КБ-n+1+\left(\frac{n}{2}-1\right)БП+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)КП$

$П+Б+К = 14+\left(\frac{n}{2}-1\right)(КБ-БП-$

Ничего не получено. Переменное не реализовано

(—) (6)

Продолжение № 5

Из $BK + EK \geq 2\sqrt{2300 + 20GH}$

получим, что минимум достигается при $GH = 10$

$BK + EK \geq 2\sqrt{2500} = 2 \cdot 50$

$(BK + EK)_{min} = 100$, тогда $2BK + 2EK = 200$ м

В таком случае BK может быть равно EK ($BK = EK = 50$)

Ответ: $AB_{min} = 200$ м; $GH = 10$ м,

Возможные BK и EK:

$BK = 50$ и $EK = 50$

20.