ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 8 7 1

Класс 11 **Вариант** 12 **Дата Олимпиады** 09.02.19

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	–	10	20	–	30					65	шестьдесят пять	[подпись]

№1

$$y = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$$

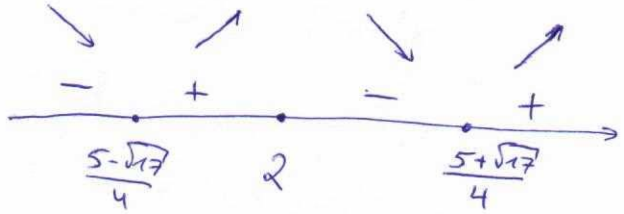
$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 4 = 0$$ (найдем точки экстремума)

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 4 = 0$$

$$(x-2)(2x^2 - 5x + 1) = 0$$

$$(x-2)\left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{4}\right) = 0$$

($\sqrt{17}$ чуть больше чем 4 $\Rightarrow$ $\frac{5+\sqrt{17}}{4} > 2 > \frac{5-\sqrt{17}}{4}$)



✓

Точки минимума в $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$

$$\boxed{\frac{5+\sqrt{17}}{4} \approx \frac{9}{4}}$$

$$y_{min} = \frac{(5\pm\sqrt{17})^4}{4^4} - 6\,\frac{(5+\sqrt{17})^3}{4^3} + 11\,\frac{(5+\sqrt{17})^2}{4^2} - \cancel{4}\,\frac{5+\sqrt{17}}{\cancel{4}} + 9 =$$

$$= \frac{(5\pm\sqrt{17})^4 - 6\cdot 4(5\pm\sqrt{17})^3 + 11\cdot 16(5\pm\sqrt{17})^2 - 4^4(5\pm\sqrt{17}) + 4^4\cdot 9}{256} =$$

$$= \frac{9^4 - 6\cdot 4\cdot 9^3 + 11\cdot 16\cdot 9^2 \cancel{- 4^4\cdot 9} + \cancel{4^4\cdot 9}}{256} =$$

$$= \frac{9^2(81 - 6\cdot 4\cdot 9 + 11\cdot 16)}{256} = \frac{81\cdot 41}{256} > 0$$

↓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a\cdot b)c = a(b c)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 4 | 8 | 7 | 1 |

№1

↓

$$\boxed{\frac{5-\sqrt{17}}{4} \approx \frac{1}{4}}$$

$$y_{min_2} = \frac{1}{4^4} - 6\frac{1}{4^3} + 11\frac{1}{4^2} - 4\frac{1}{4} + 9 = \frac{1-6\cdot4+11\cdot4^2-4^4+9\cdot4^4}{256} =$$

$$= \frac{1-4(6-11\cdot4)+4^4(9-1)}{256} > 0$$

Т.к. значения функции в минимумах больше нуля, то эта функция не пересекает ось X $\Rightarrow$ $x^4-6x^3+11x^2-4x+9=0$ не имеет корней. ✓

5

№3

$y = \cos^2 x$

Возьмем производные первых пяти порядков

$y^{(1)} = -2\sin x\cos x = -2^1\sin x\cos x$

$y^{(2)} = -2\cos^2 x + 2\sin^2 x$

$y^{(3)} = 8\sin x\cos x = 2^3\sin x\cos x$

$y^{(4)} = -8\sin^2 x + 8\cos^2 x$

$y^{(5)} = -32\sin x\cos x = -2^5\sin x\cos x$

Заметим закономерность, что производная порядка кратного 3м равна $2^n\sin x\cos x$

число 2019 делится на 3, значит:

$y^{(2019)} = 2^{\cancel{2019}\,2018}\sin x\cos x$

10

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР | 4 | 4 | 8 | 7 | 1 |

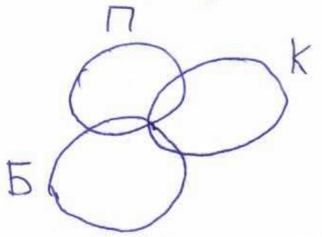
№4

Допустим, бетонщиков x человек, тогда плотников — $3x$, а каменщиков — $3nx$.

Также, людей с двумя профессиями: $3x + 3$

Из условия понятно, что нет таких бойцов, которые владеют 3мя профессиями.

Изобразим задачу с помощью кругов Эйлера



Тогда, если мы из всех людей вычтем кол-во людей в каждой профессии и прибавим людей, которые владеют двумя профессиями, то получим ноль.

$$36 - \cancel{3x} - 3nx - x + \cancel{3x} + 3 = 0$$

$$39 = x(3n+1)$$

$$3 \cdot 13 = x(3n+1)$$, т.к. x и n целые, а $(3n+1)$ не может быть равно $3n$, т.к $3 \le n \le 20$, то

$n = 4$; $x = 3$ $\Rightarrow$ людей, занятых двумя профессиями:

$3 \cdot 3 + 3 = 12$ $\Rightarrow$

Людей с одной профессией: $36 - 12 = 24$

Ответ: 24 бойца

20

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4 4 8 7 1

№6

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 \\ x^2+xz+z^2=16 \\ y^2+yz+z^2=64 \end{cases}$$

Т.к. x, y, z - положительные, то каждый член каждого уравнения не может превышать значение с правой части.

$x^2<9 \Rightarrow x<3$

$y^2<9 \Rightarrow y<3$

$z^2<16 \Rightarrow z<4$

Тогда рассмотрим последнее уравнение.

$$\underbrace{y^2}_{<9}+\underbrace{yz}_{<12}+\underbrace{z^2}_{<16}$$

Тогда: $y^2+yz+z^2<37 \Rightarrow$ противоречие с условием

Значит, данная система не имеет решений при положительных x, y, z.

Ответ: нет решений.

30