

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР

4	4	8	8	5
---	---	---	---	---

 Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19.

 Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	—	10	0	20	10	30					70	семьдесят	

$$\sqrt[2]{(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^x + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^x} \leq 14$$

Пусть $a=7, b=4\sqrt{3}$

$$(\sqrt{a-b})^x + (\sqrt{a+b})^x \leq 14$$

$$a-b = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a+b}; \quad a-b = \frac{49-48}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{a+b}$$

$$\sqrt[2]{\frac{1}{a+b}} + \sqrt{a+b} \leq 14$$

Пусть $t = \sqrt{a+b}^x, t > 0$

$$\frac{1}{t} + t \leq 14$$

$$t + \frac{1}{t} - 14 \leq 0$$

$$\frac{t^2 - 14t + 1}{t} \leq 0$$

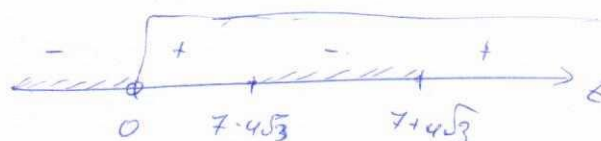
$$f(t) = t^2 - 14t + 1$$

$$D = 196 - 4 = 192 = 2^6 \cdot 3$$

$$t_1 = \frac{14 + 2^3\sqrt{3}}{2} = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$t_2 = \frac{14 - 2^3\sqrt{3}}{2} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\frac{(t - (7 + 4\sqrt{3}))}{t} \leq 0$$



$$t \in (-\infty; 0) \cup [7-4\sqrt{3}; 7+4\sqrt{3}]$$

$$t > 0$$

$$t \in [7-4\sqrt{3}; 7+4\sqrt{3}]$$



ШИФР

4 4 8 8 5

Продолжение н.з.:

$$\begin{cases} t \geq 7-4\sqrt{3} \\ t \leq 7+4\sqrt{3} \end{cases} \begin{cases} \sqrt{a+b}^x \geq a-b \\ \sqrt{a+b}^x \leq a+b \end{cases} \begin{cases} \sqrt{a+b}^x \geq \frac{1}{a+b} \\ \sqrt{a+b}^x \geq a+b \end{cases} \begin{cases} x \geq \log_{\sqrt{a+b}} \frac{1}{a+b} \\ x \leq \log_{\sqrt{a+b}} a+b \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{a+b}} \frac{1}{a+b} = 2 \log_{(a+b)} \left(\frac{1}{a+b} \right) = -2$$

$$\log_{\sqrt{a+b}} (a+b) = \log_{(a+b)^{1/2}} (a+b) = 2 \log_{a+b} (a+b) = 2$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$$

Ответ: $x \in [-2; 2]$. $\checkmark$ (10)

НЗ. $y = \cos^2 x$

1. $y' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\sin x$

2. $y'' = -2\cos x$

3. $y''' = 2\sin x$

4. $y^{(4)} = 2\cos x$

5. $y^{(5)} = -2\sin x$

6. $y^{(6)} = 2\cos x$

7. $y^{(7)} = -2\sin x$

Как мы можем заметить, значения производной n -ного порядка повторяются каждые 4 порядка, то есть $y^{(n+4)} = y^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим производную 3 порядка $y''' = 2\sin x$

$2019 = 3 + 4 \cdot 504$, иными словами, 2019 можно

выразить как $n+4k$ при $n=3$, $k \in \mathbb{Z}$. Это значит, что производная 2019 порядка равна производной 3 порядка и равна $2\sin x$.

Ответ: $y^{(2019)} = 2\sin x$. $\emptyset$

НЧ. Пусть людей, владеющих профессией плотника P , каменщиков — K , плотников, детоников — B ; обладающих двумя профессиями — d . Тогда

$$P = 36$$

$$P+B+K-d = 36$$

$$P \cdot (1+3n) = 117$$

$$P = \frac{K}{n}$$

$$P + \frac{P}{3} + nP - P - 3 = 36$$

$$P = \frac{117}{1+3n}$$

$$d = P+3$$

$$P \left(\frac{1}{3} + n \right) = 39$$

$$d = \frac{117}{1+3n} + 3$$

$$P = \frac{1+3n}{3} = 39; \quad P =$$

Тогда людей, обладающих одной профессией, будет $36 - d = 36 - \frac{117}{1+3n} + 3 = 39 - \frac{117}{1+3n}$



ШИФР

4 4 8 8 5

Задача №4:

Людей, обладающих одной профессией, будет $33 - \frac{117}{1+3n}$

Так как это число - целое, то $\frac{117}{1+3n}$ должно делиться на 33

$$117 = 339 = 9 \cdot 3^2 \cdot 13$$

$$\frac{117 \cdot 3^3}{1+3n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1+3n \text{ должно делиться на } 13 \Rightarrow n=4$$

$1+3n$ не может делиться на 3. Также оно не должно делиться на
число больше 13 $\Rightarrow n=4$

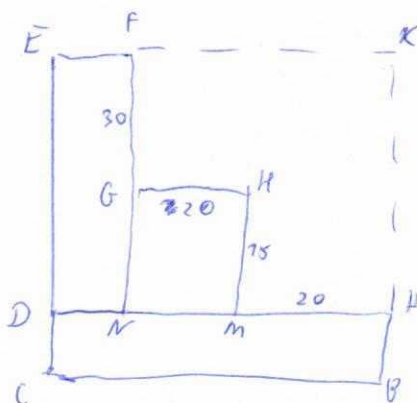
$$\Rightarrow \frac{13 \cdot 3^3}{1+12} = 9$$

$$33 - 9 = 24$$

Ответ: 24.

✓ (20)

№5.



$$MA=20\text{ м}; GF=30\text{ м}; MH=15\text{ м}; GH=20\text{ м}; S=2100\text{ м}^2$$

$$S = AB(20+GH+EF) + (30+15)EF + 15GH = 2100$$

$$P = 2(AB+EF+GH)$$

$$P = 2(AB+15+30+EF+GH+20) - \text{периметр}$$

$$P = 2(AB+EF+GH+65)$$

Чтобы P был минимальным, $AB+EF+GH$ должны быть

минимальными. $EF+GH$ имеет длину периметра, поэтому пусть $GH=20$

$$S = AB(EF+40) + 300 + 45EF = 2100$$

$$\begin{cases} S = AB(EF+40) + 45EF = 1800 \\ P = 2(AB+EF+85) \end{cases}$$

$$AB = \frac{1800 - 45EF}{EF+40}; EF = x$$

$$P = 2\left(\frac{1800 - 45x}{x+40} + 85\right) = 2\left(\frac{1800 - 45x + 85x + 3400}{x+40}\right)$$

$$P = 2\left(\frac{1800 - 45x}{x+40} + 85x\right) = 2\left(\frac{1800 - 45x + x^2 + 125x + 3400}{x+40}\right) = 2\left(\frac{x^2 + 80x + 5200}{x+40}\right)$$

$$P' = 0$$

?



ШИФР

4 4 8 8 5

Продолжение №5.

$$\begin{aligned}
 P' &= 2 \left(\frac{x^2 + 80x + 5200}{x + 40} \right)' = 2 \left(\frac{x^2 + 80x + 5200 - (x+40)(8x+80)}{(x+40)^2} \right)' = \\
 &= 2 \left(\frac{x^2 + 80x + 5200 - 2(x^2 + 80x + 1600)}{(x+40)^2} \right)' = 2 \left(\frac{x^2 + 80x + 5200 - 2x^2 - 160x - 3200}{(x+40)^2} \right)' = \\
 &= 2 \left(\frac{-x^2 - 80x + 2000}{(x+40)^2} \right)' = 0
 \end{aligned}$$

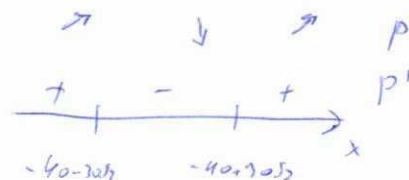
$$x^2 + 80x - 2000 = 0$$

$$D = 80^2 + 4 \cdot 2000 = 6400 + 8000 = 14400 = 120^2$$

$$\sqrt{D} = 120$$

$$x_1 = \frac{-80 + 120}{2} = -40 + 60 = 20$$

$$x_2 = -40 - 60 = -100$$



$$x = -40 + 60 = 20$$

$$EF = 20 - 40 = -20$$

$$AB = \frac{1800 - 45EF}{EF + 40} = \frac{1800 + 1800 + 9000}{EF + 40} = \frac{3600 + 9000}{-20 + 40} = \frac{12600}{20} = 630$$

$$BK = AB + 45 = 630 + 45 = 675$$

$$KE = EF + 60 + 20 = EF + 80 = -20 + 80 = 60$$

~~Решение:~~

$$P = 2(AB + EF + 85) = 2(630 - 20 + 85) =$$

$$= 2(695) = 1390$$

Ответ: периметр $P = 1390$ (длина отрезка),

при этом $BK = 675$; 60

$KE = 60$;

$BG = 20$; ✓

10



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

4 4 8 8 5

№ 6.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xz + z^2 = 16 & (2) \\ y^2 + yz + z^2 = 64 & (3) \end{cases}$$

$$(1)-(3): y^2 - z^2 + xy - xz = -7$$

$$(y-z)(y+z) + x(y-z) = -7$$

$$(y-z)(x+y+z) = -7$$

$$(1)-(2): x^2 - z^2 + xy - yz = -55$$

$$(x-z)(x+z) + y(x-z) = -55$$

$$(x-z)(x+y+z)$$

$$(2)-(3): x^2 - y^2 + xz - yz = -48$$

$$(x-y)(x+y) + z(x-y) = -48$$

$$(x-y)(x+y+z) = -48$$

$$\begin{cases} (x+y+z)(z-y) = 7 \\ (x+y+z)(z-x) = 55 \\ (x+y+z)(y-x) = 48 \end{cases}$$

$$\text{т.к. } x, y, z > 0, \text{ то } z > y$$

$$z > x \quad (=)$$

$$y > x$$

$$x < y < z$$

$$\begin{cases} x+y+z = \frac{7}{z-y} \\ x+y+z = \frac{55}{z-x} \\ x+y+z = \frac{48}{y-x} \end{cases}$$

$$\frac{55}{z-x} = \frac{48}{y-x}$$

$$48z - 48x = 55y - 55x$$

$$7x = 55y - 48z; \quad x = \frac{55y - 48z}{7}$$

$$z - x = z - \frac{55y - 48z}{7} = \frac{7z + 48z - 55y}{7} = \frac{55z - 55y}{7} = \frac{55}{7}(z-y)$$

$$x+y+z = \frac{55-7}{55}(z-y)$$

$$x+y+z = 7(z-y)$$

$$y-x = y - \frac{55y - 48z}{7} = \frac{7y - 55y + 48z}{7} = -48 \frac{y+z}{7}$$

$$x+y+z = \frac{48}{y-x} = \frac{48}{-48} \cdot 7(y+z) = -7(y+z)$$

$$\Rightarrow 7(z-y) = -7(y+z)$$

$$z-y = -y+z; \quad 2z=0; \quad z=0$$

Ответ: нет решения

✓ (30)