ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922

Класс 11 Вариант 5 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания ТИУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	3	5	5	5	10	10	–	15	13	20	86	восемьдесят шесть	[signature]

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922

№1.

$(x+1)(x+3)(x+5)=x(x^2-9)$

$(x+1)(x+3)(x+5)+x(3-x)(x+3)=0$

$(x+3)\cdot((x+1)(x+5)+x(3-x))=0$

$(x+3)\cdot(x^2+6x+5+3x-x^2)=0$

$(x+3)(8x+5)=0$

$x+3=0 \qquad 8x+5=0$

$x_1=-3 \qquad x_2=-\frac{5}{8}$

Ответ: $x\in\{-3;-\frac{5}{8}\}$

№3.

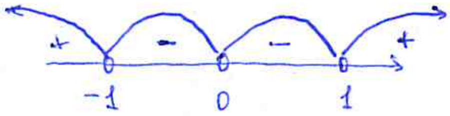
$\frac{x^2+2}{x^2-1}<-2$

$\frac{x^2+2}{x^2-1}+2<0$

$\frac{x^2+2+2x^2-2}{(x-1)(x+1)}<0$

$\frac{3x^2}{(x-1)(x+1)}<0$

Метод интервалов:



Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$ +

№4.

$\lg(x-13)+3\lg 2=\lg(3x+1)$

ОДЗ:

$\begin{cases}x-13>0\\3x+1>0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x>13$

$\lg(x-13)+\lg 8=\lg(3x+1)$

$\lg 8(x-13)=\lg(3x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8(x-13)=3x+1$

$5x=105$

$x=21$

Ответ: $x=21.$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922

№2.

$\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$

ОДЗ:

$\begin{cases} 22-x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\leq 10$

Правая часть ур-ния положительная, след-но, левая часть ур-ния также положительная.

Тогда:

$\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}\right)^2=4$

$32-2x-2\sqrt{(22-x)(10-x)}=4$

$\sqrt{(22-x)(10-x)}=14-x$

Правая часть данного ур-ния, согласно ОДЗ ($x\leq 10$), положительна; след-но, левая часть ур-ния также положительна.

Тогда: $\left(\sqrt{(22-x)(10-x)}\right)^2=(x-14)^2$

$(x-22)(x-10)=(x-14)^2$

$x^2-32x+220=x^2-28x+196$

$4x=24$

$x=6$

Ответ: $x=6$.

+

№6.

x - кол-во человек в 1ом корпусе; $(x-4)$ - во 2ом корпусе; $(x+3)$ - в 3ем корпусе

Из условия задачи:

$x+(x-4)+(x+3)=119$

$3x-1=119$

$x=40$; $x-4=36$; $x+3=43$

Ответ: в 1ом корпусе живут 40 человек; во 2ом - 36; в 3ем - 43.

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922.

№9.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ tg x \cdot tg y = 3 \end{cases}$$

1) $tg x \cdot tg y = \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = 3 \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{\sin x \cdot \sin y}{3} = \frac{1}{4}$

2) $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$\cos(x-y) = 1$

$x - y = 2\pi n,\ n \in Z$

$x = y + 2\pi n$

3) $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$

$\cos(y + 2\pi n) \cdot \cos y = \frac{1}{4}$

$\cos^2 y = \frac{1}{4}$

$$\left[\begin{aligned} &\cos y = \frac{1}{2} \\ &\cos y = -\frac{1}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \\ &y_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \\ &y_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \\ &y_4 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z \end{aligned}\right.$$

4) $x = y + 2\pi n,\ n \in Z \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k) \\ &x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k) \\ &x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi(n+k) \\ &x_4 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi(n+k) \end{aligned}\right.$

+

~~Ответ: $\left(\frac{\pi}{3};\right.$~~

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k);\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi(n+k);\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi(n+k);\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $\{n; k\} \subset Z$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922

№5.

$5^{2x+1} > 5^x + 4$

$5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 > 0$

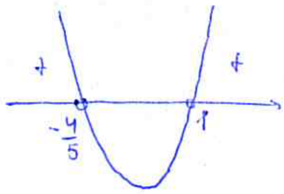
$5^x = t$ $(5^x > 0\ (\forall x) \Rightarrow t > 0)$

$5t^2 - t - 4 > 0$

$5t^2 - t - 4 = 0$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{10}$

$t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{4}{5}$



$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t < -\frac{4}{5} \\ t > 1 \end{array} \right. \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t > 1$

$5^x > 1$

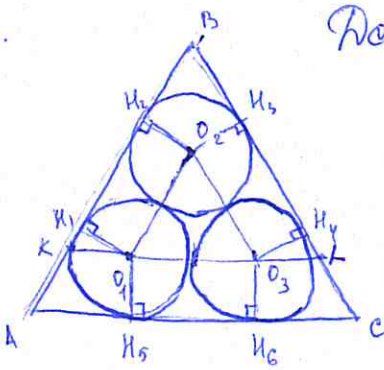
$5^x > 5^0$

$5 > 1$, след-но, $f(x) = 5^x$ – ф-ция возрастающая на $(-\infty; \infty)$

Тогда: $5^x > 5^0 \Longleftrightarrow x > 0$

Ответ: $x \in (0; \infty)$.

№8.



Дано: S_{ABC} (наим.) $= 4\sqrt{3} + 6$ (дм^2)

(1): Окр-ти с центрами O_1, O_2 и O_3 попарно соприкасаются; след-но, $O_1O_2 = O_1O_3 = O_2O_3 = 2r$ (т.к. радиусы данных окр-тей равны)

(2): Из (1) следует, что $\triangle O_1O_2O_3$ – равносторонний

(3): Дополн. построение: прямая KL; $O_1 \in KL$, $O_3 \in KL$

(4): $O_1O_3H_6H_5$ – параллелограмм, т.к. $O_1H_5 = O_3H_6 = r$, $O_1H_5 \parallel O_3H_6$ (т.к. $O_1H_5 \perp AC$ и $O_3H_6 \perp AC$)

(5): Из (4) следует, что $O_1O_3 \parallel H_5H_6$, или $KL \parallel AC$, и $H_1H_2 = O_1O_2 = 2r$

(6): $\angle BKL = \angle BAC$, т.к. они соответственные при $KL \parallel AC$ и секущей AB

(7): $\angle BLK = \angle BCA$, т.к. они соответств. при $KL \parallel AC$ и секущей BC.

(8): Из рассуждений, аналогичных описанным в пунктах (4)-(6), следует, что $\angle BKL = \angle O_2O_1O_3$ и $\angle BLK = \angle O_2O_3O_1$

(9): Из (6)-(8) следует, что $\angle BAC = \angle O_2O_1O_3$ и $\angle BCA = \angle O_2O_3O_1$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 12922

№8 (продолжение).

(10): $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$ по 2м углам (из (9)).

(11): Точка O_2 равноудалена от сторон $\angle ABC$ ($H_2O_2 = H_3O_2 = r$), след-но, BO_2 - биссектриса $\angle ABC$

(12): Из (2) и (10) следует, что $\triangle ABC$ - равностор.; $\angle ABC = 60°$

(13): Из (11) и (12) следует, что $\angle H_2BO_2 = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$

(14): $\triangle H_2BO_2$ - прямоугольный ($H_1O_2 \perp H_1B$); $ctg\angle H_2BO_2 = ctg 30° = \frac{H_2B}{H_2O_2} = \frac{H_2B}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow H_2B = r\sqrt{3}$

(15): Из рассуждений, аналогичных (10)-(14), следует, что $AH_1 = r\sqrt{3}$

(16): $AB = AH_1 + H_1H_2 + H_2B = 2r + 2r\sqrt{3} = 2r(1+\sqrt{3})$

(17): Из (10) и (16) следует, $k = \frac{AB}{O_1O_2} = \frac{2r(1+\sqrt{3})}{2r} = 1+\sqrt{3}$

(18): $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}} = k^2 = 4+2\sqrt{3}$

$S_{O_1O_2O_3} = \frac{S_{ABC}}{S_{O_1O_2O_3}} = \frac{4\sqrt{3}+6}{4+2\sqrt{3}}$

(19): $S_{O_1O_2O_3} = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}+6}{4+2\sqrt{3}} \Rightarrow r^2 = \frac{4\sqrt{3}+6}{(4+2\sqrt{3})\sqrt{3}} = 1,\ r>0$

Ответ: радиус пиццы равен 1. $r=1$

Примечание к решению:
наименьшая площадь $\triangle ABC$ получается в случае, если его стороны являются касательными к окружностям (AB - касат-ная к $\omega(O_1)$ и $\omega(O_2)$; AC - к $\omega(O_1)$ и $\omega(O_3)$; BC - касат-ная к $\omega(O_2)$ и $\omega(O_3)$).

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12922

№10.

1) Введём обозначение: $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=a$

2) $\sqrt{80}<\sqrt{81}$; $\sqrt{80}<9$

Тогда: $\left.\begin{matrix} 9-\sqrt{80}>0; & \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}>0 \\ 9+\sqrt{80}>0, & \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a>0$

3) $a=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \Longleftrightarrow a^3=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^3$

$a^3=(9+\sqrt{80})+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2(9-\sqrt{80})}+3\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})(9-\sqrt{80})^2}+(9-\sqrt{80})$

$a^3=18+3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)=18+3a$

$a^3=18+3a$

$a^3-3a-18=0$

$a_1=3$, $a^3-3a-18=(a-3)(a^2+3a+6)$

	1	0	-3	-18
3	1	3	6	0

$(a-3)\underbrace{(a^2+3a+6)}_{D=9-24<0 \Rightarrow a^2+3a+6>0}=0$

$a=3$ – единств. решение

$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=a=3$ +

Ответ: значение данного выражения – 3

№7.

$S=\frac{2b_1}{q-1}=3$ $\quad S^2=9=\frac{4b_1^2}{(q-1)^2}$

$S_{кв.}=\frac{2b_1^2}{q^2-1}=4,5$ $\quad \frac{S^2}{S_{кв.}}=\frac{4b_1^2}{(q-1)^2}\cdot\frac{q^2-1}{2b_1}=\frac{9}{4,5}=2$

$q^2-1=(q-1)^2 \Rightarrow q^2-1=q^2-2q+1$ ...