ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

**ШИФР** 8788

**Класс** 11 **Вариант** 6 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

**Площадка написания** ТИУ

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Σ | | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | Цифрой | Прописью | |
| Оценка | 5 | 5 | 5 | 5 | 10 | 10 | 9 | 5 | 13 | 20 | 87 | восемьдесят семь | |

Задача 1

$(x^2+2x+2)(x^2+2x-2)=5$

$(x^2+2x)^2-4=5$

$(x^2+2x)^2=9$

$\left[\begin{array}{l} x^2+2x=3 \\ x^2+2x=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x+3=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3;\ x_2=1 \\ \varnothing \quad (D<0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

Ответ: $-3;\ 1$ +

Задача 2

Условие: $x \geq 3$

$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$

Возведем обе части в квадрат

$2x+1+x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=4x$

$-2+2\sqrt{2x^2-5x-3}=x$

$x+2=2\sqrt{2x^2-5x-3}$

Возведем обе части в квадрат

$x^2+4x+4=4(2x^2-5x-3)$

$x^2+4x+4=8x^2-20x-12$

$7x^2-24x-16=0$

$x_1=4$

$x_2=-\frac{4}{7}$ (пост. корень; из-за усл.)

Ответ: 4 +

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8788

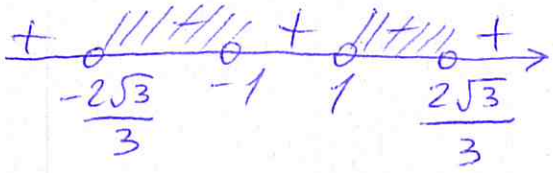
## Задача 3

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} < -2$$

$$\frac{x^2-2}{x^2-1} + 2 < 0$$

$$\frac{x^2-2+2x^2-2}{x^2-1} < 0$$

$$\frac{3x^2-4}{x^2-1} < 0$$




$x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ +

Ответ: $x \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right) \cup \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

## Задача 4

Условие: $x > 1$

$$\log_4(2x+3) + \log_4(x-1) = 2 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\log_4((2x+3)(x-1)) = \log_4 16 - \log_4\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\log_4(2x^2+x-3) = \log_4 3$$

$$2x^2+x-3 = 3$$

$$2x^2+x-6 = 0$$

$x_1 = 1{,}5$ $x_2 = -2$ (пост. корень из-за усл.)

Ответ: 1,5 +

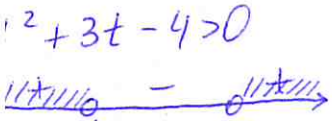
## Задача 5

$$4^x > 4 - 3 \cdot 2^x$$

$$4^x + 3 \cdot 2^x - 4 > 0$$

$2^x = t \quad t > 0$

$t^2 + 3t - 4 > 0$




$t \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty) \Rightarrow t \in (1; +\infty)$

$t > 0$

$2^x > 1$

$2^x > 2^0$

$x > 0$ +

## Задача 6

План:
A — 4x
B — 3x
C — 6x

Действительность:
A — 4x+4
B — 3x+5
C — 6x+6

$7\frac{9}{13}\% = \frac{100}{13}\% = \frac{1}{13}$ ; $1 + \frac{1}{13} = \frac{14}{13}$

$$(4x+3x+6x) \cdot \frac{14}{13} = 4x+4+3x+5+6x+6$$

$14x = 13x + 15$

$x = 15$

$4x+4 = 64$ (спец. A)
$3x+5 = 50$ (спец. B)
$6x+6 = 96$ (спец. C) +

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8788

Задача 9

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \cdot \cos y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \cos y$$

$$\cos y \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \cos y\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos y \left(1-\sqrt{3} - 2\cos y\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos y - \sqrt{3}\cos y - 2\cos^2 y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2\cos^2 y + \cos y(\sqrt{3}-1) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$D = 3+1-2\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 3+1+2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$$

$$\cos y = \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos y = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{3}-1}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad n, k \in Z$$

Если $\cos y = \frac{1}{2}$, то:

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \quad m, l \in Z$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$$

Если $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi t \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi w \end{cases} \quad t, w \in Z$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi l; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$; $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi w; \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$ $k, n, m, l, t, w \in Z$.

+

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8788

Задача 7

q - знаменатель прогрессии

$S = b_1 + b_2 + \dots + b_{13}$

$S - ?$

$b_1 = 1$

$b_5 + b_9 = 6$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = q^4$

$b_9 = b_1 \cdot q^8 = q^8$

$q^8 + q^4 = 6$

$q^8 + q^4 - 6 = 0$

$q^4 = 2$ $\quad q^4 = -3$ (пост. корень)

$q^2 = \sqrt{2}$

$S = \frac{b_1 \cdot (q^{13} - 1)}{q - 1} = \frac{q^{13} - 1}{q - 1}$

$q^2 = \sqrt{2} \Rightarrow$ Возможны 2 случая:

1) $q = 2^{1/4}$

$S = \frac{q^{13} - 1}{q - 1} = \frac{2^{13/4} - 1}{2^{1/4} - 1}$

2) $q = -2^{1/4}$

$S = \frac{-2^{13/4} - 1}{-2^{1/4} - 1} = \frac{2^{13/4} + 1}{2^{1/4} + 1}$

Ответ: если $q > 0$, то $S = \frac{2^{13/4} - 1}{2^{1/4} - 1}$

если $q < 0$, то $S = \frac{2^{13/4} + 1}{2^{1/4} + 1}$

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 8788

Задача 10

$\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = a$

$x^3 = 20+\sqrt{392} + 20-\sqrt{392} + 3\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})^2(20-\sqrt{392})} + 3\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})(20-\sqrt{392})^2}$

$x^3 = 40 + 3\sqrt[3]{8(20+\sqrt{392})} + 3\sqrt[3]{8(20-\sqrt{392})}$

$x^3 = 40 + 6\cdot\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + 6\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$

$x^3 = 40 + 6a$

$x^3 - 6a - 40 = 0$

$(x-4)(a^2+4a+10) = 0$

$a - 4 = 0$

$x^2 + 4a + 10 = 0$

$a = 4$

$\phi \quad (D<0)$

$\Rightarrow a = 4$

$a^3 - 6a - 40 \mid a-4$

$-a^3 - 4a^2 \quad\quad a^2+4a+10$

$4a^2 - 6a$

$-4a^2 - 16a$

$10a - 40$

$-10a - 40$

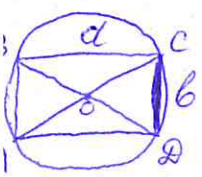
$0$

Ответ: $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}} + \sqrt[3]{20-\sqrt{392}} = 4$ +

Задача 8

$a, b$ - ? $\pi = 3,14$

$R = 10$ см Пусть $a \geq b$




$\pi R^2 = 2ab$ (след. из усл.)

$\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow BD$ - диаметр $\Rightarrow BD = 2R$

$AC = BD = 2R \Rightarrow AO = BO = CO = DO = R$

$AO = BO = CO = DO = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (Th. Пифагора)

$ab = \pi R^2$

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = R$

$\begin{cases} 2ab = \pi R^2 \\ \sqrt{a^2+b^2} = 2R \end{cases}$

$\begin{cases} 2ab = \pi R^2 \ (1) \\ a^2+b^2 = 4R^2 \ (2) \end{cases}$

Сложим (1) и (2):

$(a+b)^2 = R^2(4+\pi) = 714$

Вычтем из (2) ур-ния (1) ур-ние:

$(a-b)^2 = R^2(4-\pi) = 86$

$\begin{cases} a+b = \sqrt{714} \\ a-b = \sqrt{86} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{714}+\sqrt{86}}{2}$;

$b = \frac{\sqrt{714}-\sqrt{86}}{2}$ +

Ответ: $\frac{\sqrt{714}+\sqrt{86}}{2}$ см; $\frac{\sqrt{714}-\sqrt{86}}{2}$ см