ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 44350

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	0	7	57	пятьдесят семь	

$\boxed{№2}$

$$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x\le 14$$

$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=t$, $t>0$ (корень всегда не отрицательный)

$\Downarrow$

$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$, т.к. при перемножении этих двух чисел мы получим 1:

$$\left(\sqrt{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}\right)^x=\left(\sqrt{49-48}\right)^x=\left(\sqrt{1}\right)^x=1^x=1$$

$t+\frac{1}{t}\le 14 \quad |\cdot t \ (t>0)$

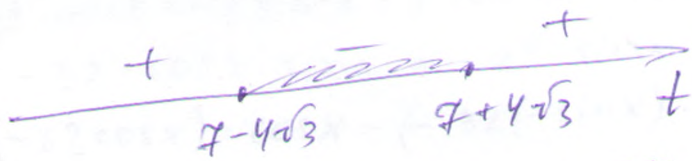
$t^2+1\le 14t$

$t^2-14t+1\le 0$

$D=196-4=192$

$\sqrt{D}=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$

$t_{1,2}=\frac{14\pm 8\sqrt{3}}{2}=7\pm 4\sqrt{3}$



$t\in[7-4\sqrt{3};\ 7+4\sqrt{3}]$

$$\begin{cases} t\ge 7-4\sqrt{3} \\ t\le 7+4\sqrt{3} \end{cases}$$

$\cdot\ t\ge 7-4\sqrt{3}$

$(7-4\sqrt{3})^{\frac{x}{2}}\ge(7-4\sqrt{3})^1$

т.к. $(7-4\sqrt{3})<1$, то

Зачем?

$\frac{x}{2}\le 1 \quad |\cdot 2 \ (2>0)$

$x\le 2$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 44350

- $t \le 7+4\sqrt{3}$

$(7-4\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} \le (7-4\sqrt{3})^{-1}$

т.к. $(7-4\sqrt{3}) < 1$, то

$\frac{x}{2} \ge -1 \mid \cdot 2 \, (2>0)$

$x \ge -2$

Получаем:

$\begin{cases} x \ge -2 \\ x \le 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2;2]$

Ответ: $x \in [-2;2]$

$\boxed{N3}$

$y = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$

1) $y' = -\sin x \cdot \cos x + (-\sin x)\cos x = -2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -2^1 \sin x \cdot \cos x$

2) $y'' = (\sin x)' \cdot (-2\cos x) + \sin x \cdot (-2\cos x)' = -2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 4\sin^2 x - 2$

3) $y''' = 4 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 8\sin x \cdot \cos x = 2^3 \cdot \sin x \cdot \cos x$

4) $y = 8\sin x \cdot (\cos x)' + (8\sin x)' \cdot \cos x = -8\sin^2 x + 8\cos^2 x = 16\cos^2 x - 8$

5) $y = 16 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = -32 \cdot \cos x \cdot \sin x = -2^5 \cdot \sin x \cdot \cos x$

6) $y = (-32\cos x)' \cdot \sin x + (-32\cos x) \cdot \cos x = (-32(-\sin x) \cdot \sin x - 32\cos^2 x = 32\sin^2 x - 32\cos^2 x = 32 - 64\cos^2 x$

7) $y = -64 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) = 2^7 \cdot \sin x \cdot \cos x$

Заметим:

- ~~степени~~ производные нечётного порядка (1, 3, 5, 7, 9 и т.д.) дают нам 2 в степени номера производной, умноженная на произведение $\sin x$ и $\cos x$
- знаки одинаковые только у ~~степеней~~ производных, разность номеров которых кратна 4
  - а) 1, 5, 9 и т.д. — знак „−"
  - б) 3, 7, 11 и т.д. — знак „+"

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 44350

Таким образом можно сделать вывод, что:

$y^{2019} = 2^{2019} \cdot \sin x \cdot \cos x$, только её знак мы пока что не знаем.

Найдём (определим) её знак:

разность между номерами должна быть кратной 4. Тогда у нас есть только 2 случая („+" или „−")

$(2019-1):4$

$2018 \mid 4$
$-2016 \mid 504{,}5$
2

⇓

знаки не совпадают ?

$(2019-3):4$

$2016 \mid 4$
$-2016 \mid 504$
0

⇓

знаки совпадают ?

⇓

$y^{2019} = 2^{2019} \cdot \sin x \cdot \cos x = 2^{2018} \cdot \sin 2x$

Ответ: $y^{2019} = 2^{2019} \cdot \sin x \cdot \cos x$ или $y^{2019} = 2^{2018} \cdot \sin 2x$ (одно и то же).

№4

Пусть x – плотников (имеющих профессию „плотник"), тогда по условию задачи $\frac{x}{3}$ – бетонщиков и $x \cdot n$ – каменщиков, а так же $(x+3)$ – люди с двумя профессиями.

Получаем:

$$\left(x+\frac{x}{3}+x\cdot n\right)-(x+3)=36$$

$$x\left(1+\frac{1}{3}+n\right)-x=39$$

$$x\left(\cancel{1}+\frac{1}{3}+n-\cancel{1}\right)=39$$

$$x\left(n+\frac{1}{3}\right)=39$$

$$x(3n+1)=39\cdot 3$$

По условию задачи также известно, что $3 \le n \le 20$, тогда:

- $n=3$
  $x\cdot 10=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$ (т.к. x будет являться не целым числом, что невозможно; такое обозначение так же будет использоваться далее)
- $n=4$
  $x\cdot 13=39\cdot 3$
  $x=9$ $\Rightarrow$ подходящий вариант
- $n=5$
  $x\cdot 16=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=6$
  $x\cdot 19=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=7$
  $x\cdot 22=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=8$
  $x\cdot 25=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=9$
  $x\cdot 28=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=10$
  $x\cdot 31=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=11$
  $x\cdot 33=39\cdot 3$
  $x\cdot 11=39$
  $x\in\varnothing$
- $n=12$
  $x\cdot 37=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=13$
  $x\cdot 40=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=14$
  $x\cdot 43=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=15$
  $x\cdot 46=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$
- $n=16$
  $x\cdot 49=39\cdot 3$
  $x\in\varnothing$

• $n=17$
$x\cdot 52=39\cdot 3$
$x\cdot 26=39\cdot 3$
$x\cdot 2=9$
$x\in\varnothing$

• $n=18$
$x\cdot 55=39\cdot 3$
$x\in\varnothing$

• $n=19$
$x\cdot 58=39\cdot 3$
$x\in\varnothing$

• $n=20$
$x\cdot 61=39\cdot 3$
$x\in\varnothing$

Таким образом мы нашли лишь 1 вариант:

$n=4 \;|\Rightarrow\; x=9$

Т.к. по условию задачи $(x+3)$ – люди с двумя профессиями, то:

$(36-(x+3))$ – люди с ~~двумя~~ одной профессией

$x=9$

$\Downarrow$

$36-12=24$ человека с 1 профессией

Ответ: 24 человека.

$\boxed{N1}$

$x^4-6x^3+9x^2+x^2-4x+4+x^2+5=0$

$x^2\cdot(x-3)^2+(x-2)^2+x^2+5=0$

Квадрат числа всегда неотрицателен $(\geq 0)\;|\Rightarrow$

$\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}\cdot\underbrace{(x-3)^2}_{\geq 0}}_{\geq 0}+\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}+\underbrace{x^2}_{\geq 0}+5=0$

>0

$|\Rightarrow$ ур-е никогда не равно 0.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 44350

$\boxed{№6}$

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 \\ x^2+xz+z^2=16 \\ y^2+yz+z^2=64 \end{cases}$$

1) $x^2+xy+y^2-9=0$

$D=y^2-4y^2+36 \Rightarrow 36-3y^2\geq 0$

$12-y^2\geq 0$

$-2\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ y

$y\in[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$

2) $z^2+yz+y^2-64=0$

$D=y^2-4y^2+4\cdot 64 \Rightarrow 256-3y^2\geq 0$

$\frac{256}{3}-y^2\geq 0$

$-\frac{16}{\sqrt{3}}$ $\frac{16}{\sqrt{3}}$ y

$y\in[-\frac{16}{\sqrt{3}};\frac{16}{\sqrt{3}}]$

$\left.\begin{matrix}(1) \text{ и } (2) \\ y\geq 0\end{matrix}\right| \Rightarrow y\in(0;2\sqrt{3}]$

3) $y^2+yx+x^2-9=0$

$D=x^2-4x^2+36 \Rightarrow 36-3x^2\geq 0$

$12-x^2\geq 0$

$-2\sqrt{3}$ $2\sqrt{3}$ x

$x\in[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$

4) $z^2+xz+x^2-16=0$

$D=x^2-4x^2+64 \Rightarrow 64-3x^2\geq 0$

$\frac{64}{3}-x^2\geq 0$

$x\in[-\frac{8}{\sqrt{3}};\frac{8}{\sqrt{3}}]$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 44350

$$\left.\begin{matrix}(3)\text{ и }(4)\\ x>0\end{matrix}\right| \Rightarrow x\in(0;2\sqrt{3}]$$

5) $x^2+xz+z^2-16=0$

$$D = 16\cdot 4-3z^2 \Rightarrow \frac{64}{3}-z^2\geq 0$$

$$z\in\left[-\frac{8}{\sqrt{3}};\frac{8}{\sqrt{3}}\right]$$

6) $y^2+yz+z^2-64=0$

$$D = z^2-4z^2+4\cdot 64 \Rightarrow \frac{256}{3}-z^2\geq 0$$

$$z\in\left[-\frac{16}{\sqrt{3}};\frac{16}{\sqrt{3}}\right]$$

$$\left.\begin{matrix}(5)\text{ и }(6)\\ z>0\end{matrix}\right| \Rightarrow z\in\left(0;\frac{8}{\sqrt{3}}\right]$$

Ответ: $x\in(0;2\sqrt{3}]$, $y\in(0;2\sqrt{3}]$, $z\in\left(0;\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

—

ШИФР 44350

№5

Пусть $DN = y$, $AB = x$:

$y\cdot(30+15)+20\cdot 15+(y+20\cdot 20)x=2100$

$y\cdot 45+300+40x+xy=2100$

$xy+40x+45y-1800=0$

$x(y+40)+45(y-40)=0$

$\begin{cases} x(y+40)=0 \\ y-40=0 \end{cases} \Rightarrow y=40 \quad x=0$

~~нашли~~ $P=(40+20+20+30+15)2=125\cdot 2=250$ м

I

$BK=45$
$KE=80$
$GH=20$

$-$

Ответ: $P=250$ м; $BK=45$; $KE=80$; $GH=20$.