ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 38453

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.18

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30	~~сто~~ 100	сто	

№1.

$\forall x \ (x^4+4x^2-4x^3 = x^2(x^2+4-4x) = x^2(x-2)^2 \geq 0$

$\forall x \ \ 8x^2+24-24x = 8(x^2+3-3x) = 8((x-1{,}5)^2+0{,}75)>0$

$\Downarrow$

$\forall x$

$(x^4+4x^2-4x^3)+(8x^2+24-24x)>0$

$\Downarrow$

уравнение ~~$x^4+12x^2-4x^3$~~

$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ не имеет решений

№2.

(1/12) стр

Пусть $f(x)=(4-\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^x$

$(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1 \Rightarrow f(x) = (4+\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^{-x}$

Заметим, что $f(x)=f(-x)$. Давайте тогда найдем решения нер-ва на отрезке $[0;\infty)$ тогда решения на отрезке $(-\infty;0]$ будут просто симметричны относительно 0

на числовой прямой

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

Докажем, что на отрезке $[0;\infty)$ $f(x)$ возрастает.

Возьмем $y>x>0$. Пусть $a=4+\sqrt{15}>1$

Тогда $a^{x+y}>1$ $(x+y>0)$

$$\Downarrow$$

$$1>\frac{1}{a^{x+y}} \quad (a\neq 0)$$

$$\Downarrow$$

$$a^y-a^x>\frac{a^y-a^x}{a^x a^y} \quad \left(\text{ибо } a>1 \quad a^y>a^x \Rightarrow a^y-a^x>0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$a^y+\frac{1}{a^y}>a^x+\frac{1}{a^x}$$

Заметим, что при $x=2$ это что? двойка?

$(4-\sqrt{15})^2+(4+\sqrt{15})^2 = 4^2+15-2\cdot4\sqrt{15}+2\cdot4\sqrt{15}+4^2+15=62$. Значит для

$x>2$ $f(x)>62$, а значит и для $x<-2$ $f(x)>62$, а при $x\in[-2;2]$ $f(x)\le 62$. (при $2\ge x\ge0$ $f(2)\ge f(x)$, $f(2)=62$, решения на $(-\infty;0)$ симметр. отн 0)

Ответ: $x\in[-2;2]$.

$(2/12)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

№3

Итак $(\sin^2 x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$

Осталось найти $(\sin(2x))^{2018}$. Докажем индукцией по n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), докажем что $(\sin(2x))^{(4n+2)} = 2^{4n+2} \cdot -\sin(2x)$.

База для $n=0$: $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$

$(2\cos(2x))' = -4\sin(2x)$ $(\sin(2x))^{(4\cdot 0+2)} = 2^2 \cdot -\sin(2x)$.

Переход от n к $n+1$.

$(\sin(2x))^{(4n+2)} = 2^{4n+2} \cdot -\sin(2x)$

$(2^{4n+2} \cdot -\sin(2x))' = 2^{4n+2} \cdot (-\sin(2x))' = 2^{4n+3} \cdot (-\cos(2x))$

$(2^{4n+3} \cdot (-\cos(2x)))' = 2^{4n+3}(-\cos(2x))' = 2^{4n+4} \cdot \sin(2x)$

$(2^{4n+4} \sin(2x))' = 2^{4n+5} \cdot \cos(2x)$

$(2^{4n+5} \cdot \cos(2x))' = 2^{4n+5} \cdot (\cos(2x))' = 2^{4n+6} \cdot -\sin(2x) =$

$= 2^{4(n+1)+2} \cdot -\sin(2x)$. $\Rightarrow (\sin(2x))^{(4n+6)} = 2^{4(n+1)+2} \cdot -\sin(2x)$

Переход доказан. $\Rightarrow (\sin(2x))^{2018} = 2^{2018} \cdot -\sin(2x) = -2^{2018}\sin(2x)$

$2018-2=2016 \vdots 4$

Ответ: $-2^{2018} \cdot \sin(2x)$ (3/12)сб.

ШИФР 38453

№6 (4|12) стр.

Возьмем какое-нибудь решение нашего уравнения ~~до~~ (x,y,z) в положительных числах, если оно есть. Давайте построим треугольник со сторонами x, y (треугольник может оказаться вырожденным, то есть ΔBC на прямой) и углом 120° между этими сторонами, и со сторонами x, z и углом 120° между этими сторонами. Совместим эти треугольники по стороне x (как на рис.1)

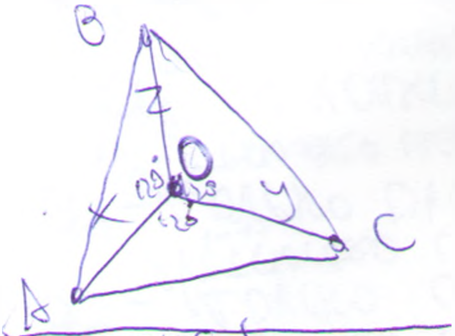


рис.1

Тогда $\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BOC = 120^\circ$ ($\angle AOC = 120^\circ$, $\angle AOB = 120^\circ$ по построению)

Посмотрим на любой из треугольников ΔAOC, ΔAOB, ΔBOC. Например (не умаляя общности) — ΔAOC.

~~за Не~~ $AO^2 + OC^2 - 2AO\cdot OC\cdot\cos\angle AOC = AC^2$

$2\cos(120^\circ) = -1$ $\Downarrow$

$AO^2 + OC^2 + AO\cdot OC = AC^2$

$(x^2 + y^2 + xy = AC^2)$ $\Downarrow$

$AC^2 = 4 \Rightarrow AC = 2$, $AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$, $BC^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$

Но $AB + AC \geq BC \Rightarrow 3 + 2 \geq 6$ $5 \geq 6$!

(для треугольников и вырожденных треугольников, то есть треугольников, где A, B, C лежат на одной прямой)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453.

(5 | 2)

$5 \geq 6 \Rightarrow$ (6>5) противоречие, значит у нашего уравнения нет положительных решений.

№ 4

$a_{п,к}$ – обозначим количество людей ~~знающих~~ владеющих профессией плотника и каменщика.

$a_{б,к}$ – количество владеющего профессией бетонщика и каменщика

$a_{п,б}$ – количество владеющего профессией плотника и бетонщика

$a_п$ – количество владеющего профессией только проф. плотника

$a_б$ – количество владеющего профессией только проф. бетонщика

$a_к$ – владеющего профессией только проф. каменщика

По условию задачи

$$a_{п,к}+a_{б,к}+a_{п,б}=2\cdot(a_{п,к}+a_п+a_{п,б})$$

владеющих двумя профессиями — владеющие профессией плотника

$\Downarrow$

$$a_{б,к}=a_п+2$$

Также по условию задачи

$$a_{п,к}+a_{п,б}+a_п=2\cdot(a_{п,б}+a_б+a_{б,к})$$

(владеющие профессией плотника) $\Downarrow$ (владеющие проф. бетонщика)

$\Downarrow$ $(a_{б,к}=a_п+2)$ (6/12) стр

$$a_{п,к}+a_{п,б}+a_п=2(a_{п,б}+a_б+a_п+2)$$

$\Downarrow$

$$a_{п,к}=a_{п,б}+2a_б+a_п+4.$$

Также по условию задачи

$$(a_{п,к}+a_{п,б}+a_п)\cdot n=a_{п,к}+a_к+a_{б,к}$$

(владеющих проф. плотника) (владеющих проф. каменщика)

$a_{б,к}=a_п+2$ (2.)

$a_{п,к}=a_{п,б}+2a_б+a_п+4$ (3.)

$\Downarrow$

$$(a_{п,к}+a_{п,б}+a_п)\cdot n=a_{п,б}+2a_б+2a_п+a_к+6$$

$$(2a_{п,б}+2a_б+2a_п+4)n=a_{п,б}+2a_б+2a_п+a_к+6$$

$\Downarrow$

$$(2n-1)a_{п,б}+(2n-2)a_п+(2n-2)a_б+4n-6=a_к \ (!$$

Сумма

$$a_п+a_к+a_б+a_{п,к}+a_{п,б}+a_{б,к}=32$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

(7/12)

Заменим в этом равенстве a_k на как в ср. (?) равенстве (1_0), $a_{n,k}$ как в равенстве (3_0), $a_{\sigma,k}$ как в равенстве (2_0).

Получим

$$(2n+1)a_{n,\sigma}+(2n+1)a_n+(2n+1)a_\sigma+4n=32$$

$$(2n+1)(a_{n,\sigma}+a_n+a_\sigma)+4n=32$$

$32-4n \vdots 2n+1$ ($2n+1$, взаимопросто с 2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $8-n \vdots (2n+1)$. Заметим, что $a_{n,\sigma}+a_n+a_\sigma\geq 0$

$\Rightarrow 32\geq 4n \Rightarrow 8\geq n$. Также заметим, что

$2\cdot n+1\geq 7$. ~~$8-n\geq 7$~~ Тогда, либо $8-n=0$, либо

$8-n\geq 2n+1 \Rightarrow 7\geq 3n \Rightarrow 3>n$, значит $8-n=0$.

($8-n=k(2n+1)$ ибо делится и $8\neq n$ и $8-n>0$, $k\geq 1$)

Тогда $(a_{n,\sigma}+a_n+a_\sigma)\cdot 17+32=32 \Rightarrow$ (ибо $a_{n,\sigma}\geq 0$, $a_n\geq 0$, $a_\sigma\geq 0$)

$\Rightarrow a_{n,\sigma}+a_n+a_\sigma=0$, а значит $a_{n,\sigma}=0$, $a_n=0$, $a_\sigma=0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 38453

(8|12)

Посмотрим на кол-во людей владеющих только одной профессией, то есть

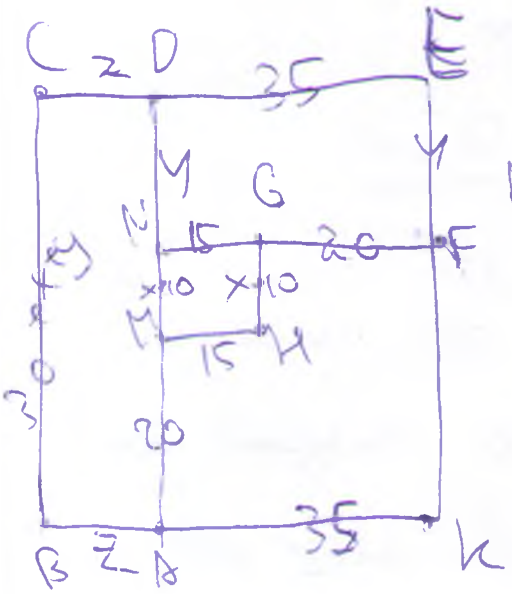
$a_п + a_м + a_б = a_к$, по рисунку (1.)

$a_к = 4n - 6 = \left(\begin{matrix} a_б = 0 \\ a_п = 0 \end{matrix} \quad a_{п,б} = 0 \right)$

$= 4 \cdot 8 - 6 = 26$

Ответ: 26.

№5.



И сам, пусть $AB = CD = z$, $EF = y = DN$

а $GH = 10 + x$, где $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Заметим, что $NF = NG + GF = 15$
$= MH + GF = 35 =$

$= DE = AK$ $\quad MN = GH = x + 10$,

Посмотрим на длину ограждения, т.е. $BC + CE + BK + EK =$

$= (30 + x + y + 35 + z) \cdot 2 \Rightarrow$ Нам надо минимизировать

ГАЗПРОМ

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

(9/12) стр.

$x+y+z$, зная, что $x,y,z\geq 0$ и

$$15(x+10)+35\cdot y+(30+x+y)\cdot z=1600$$

(Для любых x,y,z для которых выполнено условие (всё ещё можно построить многоугольник $ABCEFGHM_9$) удовл. условиям задачи).

$$15(x+y+z)+20y+15z+(x+y)\cdot z=1450$$

Пусть $x+y+z=S$, тогда

$$\cancel{(15+z)}\ 15s+20y+15z+z(S-z)=1450$$

Тогда

$$S=\frac{1450+z^2-20y-15\cdot z}{15+z}=f(y,z)$$

Заметим, что $S\geq y+z$, И заметим, что если мы найдем такие $y,z\geq 0$, что $f(y,z)\geq y+z$, и при этом $f(y,z)$ наим. возможное, то мы опять же решим задачу, т.к. возьмем $x=f(y,z)-y-z$, $x+y+z$ будет наименьшим возможным.

Тогда ⇑ – эквивалентно

$z \geq 0$

СТР

$15+z>0$

$$S=\frac{1450+z^2-20y-15z}{15+z} \geq y+z \quad (1.)$$

$\Updownarrow$ $15+z>0$

$$1450+z^2-20y-15z \geq (15+z)(y+z)$$

$\Updownarrow$

$$1450 \geq 35y+30z+y\cdot z$$

$\frac{1450-30z}{35+z} \geq y$. Давайте зафиксируем z.

Тогда чем больше y, тем меньше $\frac{1450+z^2-15z-20y}{15+z}$. Но при этом у нас выполняется $\frac{1450-30z}{35+z} \geq y$, значит если мы возьмем

$y=\frac{1450-30z}{35+z}$, мы получим наименьшее

значение $f(y,z)$ для данного z, (при этом нер-во

1. обратится в равенство) (и разумеется $1450-30z \geq 0$ должно
так как вполне удовлетворяет

было [illegible]

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

(11/12)

стевица

$\Rightarrow$ удовлетворяющего нер-ву 1_0 и $y \geq 0$ не существует

И так при фиксированном z 1_0, и $y = \frac{1450-30z}{35+z}$

(1_0) обращается в равенство ~~при этом~~

Значит ~~$x \geq S \cdot z$~~ $S = y+z$, ~~если это~~ да. !!!

Давайте докажем, что $\frac{1450-30\cdot z}{35+z} + z \geq 35$.

(при $1450 \geq 30z$). Возьмем $t = 35+z$. Заметим, что

$$(t-50)^2 + 2500 - \left(\frac{65+35}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} 2500 = 50^2 = \left(\frac{65+35}{2}\right)^2 \\ t \geq 35 \end{cases}$$

Тогда

$$t^2 - (65+35)t + 2500 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$2500 - 30t + t(t-35) \geq 35t$$

$$\Downarrow$$

$$(1450 - 30(t-35)) + t(t-35) \geq 35t$$

$$\Downarrow$$

$$(1450 - 30\cdot z) + z(z+35) \geq 35(z+35)$$

$$\Downarrow$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38453

(12/12)

$\frac{1450-30z}{z+35}+z \geq 35$ (2.)

Значит $S \geq 35$, при этом равенство

$f=50$, т.е. если $z=15$, тогда нер-во (2.) обратится в равенство. Значит минимальное $S=35$. Все $x=0$,

$y=\frac{1450-30\cdot15}{50}=\frac{145-3\cdot15}{5}=29-9=20$,

Наша длина ограды будет $(30+35+35)\cdot2=200$.

$BK=35+z=50$, $KE=CB=30+x+y=$

$=30+y=50$

Ответ: наименьшая длина ограды $=200$,

$BK=50$, $KE=50$, $GH=10$