ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 39903

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 9.02.2019

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30	100	сто	

№1

$$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$$

$$f(x)=x^4-4x^3+12x^2-24x+24$$

$$f(x)=(x^4-4x^3+4x^2)+8x^2-24x+24=x^2(x-2)^2+8(x^2-3x+3)=$$

$$=x^2(x-2)^2+8\left(\left(x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+3-\frac{9}{4}\right)=x^2(x-2)^2+8\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=x^2(x-2)^2+8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+6$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2(x-2)^2\geq 0 \\ 8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0 \\ 6>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(x-2)^2+8\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+6>0$$

Значит

$f(x)>0$ при любом x

Значит уравнение $f(x)=0$ не имеет решен

Значит уравнение

$$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$$

не имеет решения

Что и требовалось доказать

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 39903

№2

$$(4-\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^x\leq 62$$

$$\left(\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2+2\cdot(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\leq 62+$$
$$+2(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}$$

$$\left((4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\right)^2\leq 62+2\cdot\left((4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$\left((4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\right)^2\leq 62+2\cdot(4^2-15)^{\frac{x}{2}}$$

$$\left((4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\right)^2\leq 62+2\cdot 1^{\frac{x}{2}}$$

$$\left((4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\right)^2\leq 64$$

т.к. $4-\sqrt{15}>0$ $(16>15)$

$$\left.\begin{array}{l}(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}>0\\ (4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}>0\end{array}\right\}\Rightarrow (4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}>0$$

$\Downarrow$

можно извлечь корень

$$(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}+(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}\leq 8$$

Пусть $t=(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}$; $t>0$

$$(4-\sqrt{15})\cdot(4+\sqrt{15})=1.$$

$$4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$$

$$(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}}$$

$$(4-\sqrt{15})^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{t}$$

$$t+\frac{1}{t}\leq 8$$

$$t^2+1\leq 8t$$

$$t^2-8t+1\leq 0$$

$$t^2-8t+1=0$$

$$D=(8)^2-4\cdot1\cdot1=64-4=60$$

№ 2 (Продолжение)

$$t_{1;2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{\text{Д}}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$t_1 = 4 + \sqrt{15}$ $\qquad$ $t_2 = 4 - \sqrt{15}$

$t \in [4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}]$

$$\begin{cases} t \geq 4 - \sqrt{15} & 1) \\ t \leq 4 + \sqrt{15} & 2) \end{cases}$$

1) $(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} \geq 4 - \sqrt{15}$

$(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} \geq \frac{1}{4+\sqrt{15}}$

$(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} \geq (4+\sqrt{15})^{-1}$

т.к. $4 + \sqrt{15} > 1$

$\frac{x}{2} \geq -1$

$x \geq -2$

2) $(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} \leq 4 + \sqrt{15}$

$(4+\sqrt{15})^{\frac{x}{2}} \leq (4+\sqrt{15})^1$

$\cancel{\frac{x}{2}}$

т.к. $4 + \sqrt{15} > 1$

$\frac{x}{2} \leq 1$

$x \leq 2$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

$x \in [-2; 2]$

Ответ: $x \in [-2; 2]$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

ШИФР 39903

№3

$y = \sin^2 x$

$(\sin^2 x)' = 2\cdot\sin x\cdot(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

Обозначим:

$f_i(x) = (\sin 2x)^{(i)}$ – i-ая производная функции $y = \sin 2x$

Необходимо найти $f_{2018}(x)$

Заметим, что:

$f_{i+1}(x) = (\sin 2x)^{(i+1)} = \left((\sin 2x)^{(i)}\right)' = (f_i(x))'$

Докажем по индукции, что:

$f_{4k}(x) = 2^{4k}\sin 2x$

База:

$f_1(x) = (\sin 2x)' = 2\cdot\cos 2x$

$f_2(x) = (2\cdot\cos 2x)' = 2\cdot2\cdot(-\sin 2x) = -2^2\sin 2x$

$f_3(x) = (-2^2\sin 2x)' = -2^2\cdot2\cdot\cos 2x = -2^3\cos 2x$

$f_4(x) = (-2^3\cos 2x)' = -2^3\cdot2\cdot(-\sin 2x) = 2^4\sin 2x$

Переход:

Пусть по предположению индукции

$f_{4k}(x) = 2^{4k}\sin 2x$

$f_{4k+1}(x) = (2^{4k}\sin 2x)' = 2^{4k}\cdot2\cos 2x = 2^{4k+1}\cos 2x$

$f_{4k+2}(x) = (2^{4k+1}\cos 2x)' = 2^{4k+1}\cdot2\cdot(-\sin 2x) = -2^{4k+2}\sin 2x$

$f_{4k+3}(x) = (-2^{4k+2}\sin 2x)' = -2^{4k+2}\cdot2\cdot\cos 2x = -2^{4k+3}\cos 2x$

$f_{4k+4}(x) = (-2^{4k+3}\cos 2x)' = -2^{4k+3}\cdot2(-\sin 2x) = 2^{4k+4}\sin 2x$

$f_{4(k+1)}(x) = 2^{4(k+1)}\sin 2x$

Переход индукции доказан

№3 (Продолжение)

Значит $f_{4k}(x)=2^{4k}\sin 2x$ для $k\in\mathbb{N}$

$2016=4\cdot 504$

$f_{2016}(x)=2^{2016}\sin 2x$

$f_{2017}(x)=(2^{2016}\sin 2x)'=2^{2016}\cdot 2\cdot\cos 2x=2^{2017}\cos 2x$

$f_{2018}(x)=(2^{2017}\cos 2x)'=2^{2017}\cdot 2\cdot(-\sin 2x)=-2^{2018}\sin 2x$

$(\sin 2x)^{(2018)}=-2^{2018}\sin 2x$

$(\sin^2 x)^{(2019)}=((\sin^2 x)')^{(2018)}=(\sin 2x)^{(2018)}=-2^{2018}\sin 2x$

Ответ: $(\sin^2 x)^{(2019)}=-2^{2018}\sin 2x$

№4

Пусть в отряде p плотников, b бетонщиков, k каменщиков, d рабочих, владеющих 2-мя профессиями и a владеющих одной профессией.

По условию:

$p=2b$ $\quad$ $d+a=32$ (т.к. каждый человек владеет либо 2-мя, либо 1-ой професс.

$p=\frac{k}{n}$

$d=p+2 \Rightarrow d=2b+2$

$k=n\cdot p=2n\cdot b$

Посмотрим на сумму $S=b+p+k$. Заметим, что в S мы по 2 раза учли людей, у которых 2 профессии, и 1 раз людей у которых одна профессия

№4 (Продолжение)

Значит:

$$S = 2d + a$$

$$S = b + p + k = b + 2b + 2nb = (2n+3)b$$

$\Rightarrow$

$$(2n+3)b = 2d + a$$
$$(2n+3)b = 2(2b+2) + a$$
$$(2n+3)b = 4b + 4 + a$$
$$a = (2n-1)b - 4$$

$$a+d = (2n-1)b - 4 + 2b + 2 = (2n+1)b - 2$$
$$(2n+1)b - 2 = 32$$
$$(2n+1)b = 34$$
$$(2n+1)b = 2\cdot 17$$

Заметим, что $(2n+1)$ - нечётный делитель числа 34. Т.к. $n \geq 3$, $2n+1>1$. А у 34 есть только два нечётных делителя: 1 и 17. А т.к. $2n+1>1$

$$2n+1 = 17$$
$$2n = 16$$
$$n = 8$$
$$b = \frac{34}{2n+1} = \frac{34}{2\cdot 8+1} = \frac{34}{17} = 2$$

$$a = (2\cdot 8-1)\cdot 2 - 4 = 15\cdot 2 - 4 = 30 - 4 = 26$$

Ответ: 26 человек (бойцов) владеют одной профессией

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 39903

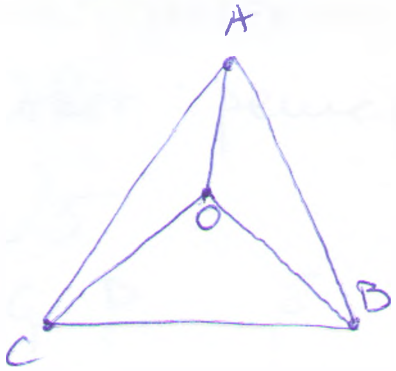
№6

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2+xz+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$$

$x, y, z > 0$

Пусть мы нашли какое-то решение $x=a$; $y=b$; $z=c$.

$a^2+ab+b^2=4$
$a^2+ac+c^2=9$
$b^2+bc+c^2=36$



Возьмём точку O на плоскости и отложим от неё отрезок длины a. $OA=a$

Отложим от этого отрезка угол 120° по часовой стрелке (повернем ~~луч прямую OA~~ ~~отрезок~~ на 120° по час. стр. относительно O), и отложим на получившемся луче точку B такую, что $OB=b$.

Повернём ~~отрезок~~ луч OB на 120° по часовой стрелке и на получ. луче отметим точку C такую, что $OC = c$

$\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 120°$ $\Rightarrow$ $\angle AOC = 360° - \angle AOB - \angle BOC = 360° - 2\cdot 120° = 120°$

В $\triangle AOB$ по теореме косинусов

$AB = \sqrt{AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot \cos 120°} = \sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot(-\frac{1}{2})} =$
$= \sqrt{a^2+b^2+ab} = \sqrt{4} = 2$

Аналогично:

$BC = \sqrt{b^2+c^2+bc} = \sqrt{36} = 6$

$AC = \sqrt{c^2+ca+a^2} = \sqrt{9} = 3$

В $\triangle ABC$ по неравенству треугольника

$BC \le AB + AC$

$6 \le 2+3$

$6 \le 5$

Это не верно

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

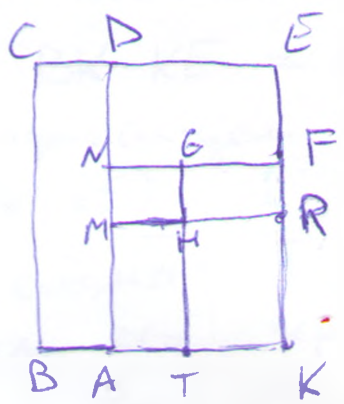
ШИФР 39903

№6 (Продолжение)

Значит, предпологая, что мы нашли решение, мы ошиблись. Значит у этой системы нет решения.

Ответ: решения нет.

№5



Продлим GH до пересеч. с AK ($GH \cap AK = T$)

и MH до пересеч. с FK ($MH \cap FK = R$)

ABCD
DEFN — прямоугольники
MNGH

$\left.\begin{array}{l} MH \parallel AB \\ GH \parallel FF \\ MH \perp GH \end{array}\right\} \Rightarrow$ THRK - прямоуг.

$\left.\begin{array}{l} MH \parallel NF \\ GH \parallel FR \\ GH \perp GF \end{array}\right\} \Rightarrow$ GFRH - прямоуг.

$\left.\begin{array}{l} MH \parallel AB \\ MA \parallel GH \\ AM \perp MH \end{array}\right\} \Rightarrow$ AMHT - прямоуг.

$\left.\begin{array}{l} BC \parallel EF \\ CE \parallel BA \end{array}\right\} \Rightarrow$ BCEK - прямоуг.

$\Rightarrow$ $AB = CD = a$

$DN = EF = b$

$NG = MH = AT = 15$ см.

$NM = GH = FR = k$

$AM = TH = RK = 20$ м

$GF = HR = TK = 20$ м

$k \geq 10$ м по усл.

Пусть R длина границы

$R = BC + CE + EF + FG + GH + MH + MA + BA = BC + CE + EF + FR + RK +$
$+ KT + TA + AB = BC + CE + EK + BK = 2BK + 2EK$

№5 (Продолжение)

Значит нужно найти минимум $R=2(BK+KE)$

$S_{BCEK}=BK\cdot KE$

$S_{BCEK}=S_{ABCDEFGHMK}+S_{GHRF}+S_{AMRK}=$

$=1600+GF\cdot GH+AM\cdot AK=1600+20\cdot k+20(15+20)=$

$=1600+700+20k=2300+20k$

$BK\cdot KE=2300+20k$

Зафиксируем k и найдём минимум выражения $(BK+KE)$

Лемма:

Если есть переменные x и y и константа t такая, что $xy=t^2$, то минимум $x+y$ достигается, когда $x=y=t$.

Доказательство:

Пусть $x=t\cdot\alpha$, где $\alpha>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$y=\frac{t^2}{x}=\frac{t^2}{t\cdot\alpha}=\frac{t}{\alpha}$

$x+y=\alpha t+\frac{t}{\alpha}=t\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для 2-х чисел (Или по неравенству Коши)

$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2\cdot\sqrt{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}}=2\cdot\sqrt{1}=2$

$x+y=t\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\geq 2t$

Причём равенство достигается, когда $\alpha=\frac{1}{\alpha}$

$\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=1$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

ШИФР 39903

№5 (Продолжение)

$x = 1$

$x = t$, $y = t$

Значит минимум достигается, когда $x = t$, $y = t$, и равен он $2t$.

Тогда заметим, что при фиксированном k

$BK \cdot KE = 2300 + 20k$

$BK \cdot KE = (\sqrt{2300+20k})^2$

По лемме минимум выражения $BK + KE$ достигается когда $BK = KE = \sqrt{2300+20k}$

$R_{min} = 2 \cdot (BK + KE) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2300+20k} = 4\sqrt{2300+20k}$

Заметим тогда, что минимальное R_{min} будет когда $k = 10$ (т.к. $k \geq 10$).

Значит минимальное из всех R_{min} — это

$4 \cdot \sqrt{2300+200} = 4 \cdot \sqrt{2500} = 4 \cdot 50 = 200$ м

Значит минимальная длина ограждения — это 200 м. Это выполнено при $k = 10$

$GH = 10$ м

$BK = KE = \sqrt{2300+200} = \sqrt{2500} = 50$ м

Ответ: 200 м; $GH = 10$ м; $BK = KE = 50$ м.