ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 43294

Класс 11 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	2	15	20	0	15	57	пятьдесят семь	

Задание 6.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x^2+xz+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$$

$x, y, z > 0 \Rightarrow x+y+z>0 \Rightarrow$

$x+y+z \neq 0$

Вычтем из 2-го равенства 1-е

$$x^2+xz+z^2-(x^2+xy+y^2)=9-4=5$$

$$x^2+xz+z^2-x^2-xy-y^2=5$$

$$z^2-y^2+xz-xy=5$$

$$(z-y)(z+y)+x(z-y)=5$$

$$(z-y)(x+z+y)=5.$$

$z-y\neq 0$ (т.к. иначе $(z-y)(x+z+y)=0$, а $(z-y)(x+z+y)=5$)

Тогда $x+z+y=\dfrac{5}{z-y}.$

Аналогично если мы вычтем из 3-го равенства 1е получим

1

ШИФР 43294

Задание 6 (продолжение 1)

$$y^2+yz+z^2-x^2-xz-z^2=36-9$$

$$y^2-x^2+yz-xz=27$$

$$(y-x)(x+y+z)=27$$

$$-x\neq 0 \Rightarrow x+y+z=\frac{27}{y-x}$$

Вычтем из 3-го равенства 1-е. Получим

$$y^2+yz+z^2-x^2-xy-y^2=36-4$$

$$\cancel{y}\ z^2-x^2+yz-xy=32$$

$$(z-x)(x+y+z)=32$$

$$z-x\neq 0 \Rightarrow x+y+z=\frac{32}{z-x}$$

Тогда $$x+y+z=\frac{5}{z-y}=\frac{27}{y-x}$$

$$5(y-x)=27(z-y)$$

$$5y-5x=27z-27y$$

$$32y=27z+5x \Rightarrow 5x=32y-27z$$

$$\cancel{x+y+z=\frac{5}{z-y}\ \frac{5}{z-y}=\frac{32}{z-x}}$$

ШИФР 43294

Задача 6 (продолжение 2)

$5x = 32y - 27z$

$5(x+y+z) = 5 \cdot \frac{5}{z-y} = \frac{25}{z-y}$

$5x + 5y + 5z = \frac{25}{z-y}$

$32y - 27z + 5y + 5z = 37y - 22z = \frac{25}{z-y}$

$25 = (37y - 22z)(z-y)$

$25 = 37yz - 37y^2 - 22z^2 + 22yz$

а) $25 = 59yz - 37y^2 - 22z^2$

$36 = y^2 + z^2 + yz \quad | \cdot 22$

б) $792 = 22y^2 + 22z^2 + 22yz$

Сложим равенства а) и б)

$792 + 25 = 59yz - 37y^2 \cancel{-22z^2} + 22y^2 \cancel{+22z^2} + 22yz$

$817 = 81yz - 15y^2$

$15y^2 - 81yz + 817 = 0$

$\cancel{D = 6561z^2 - 49020}$

$\cancel{y = \frac{\pm\sqrt{6561z^2 - 49020} + 81}{30}}$

$15y^2 - 81yz + 817 = 0$

$81yz = 15y^2 + 817$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 43294

Задание 6 (продолжение 3)

$59zy - 27z^2 - 32y^2 + 27y^2 + 27z^2 + 27yz = 972 + 25$

$86yz - 5y^2 = 997$

$5y^2 - 86yz + 997 = 0$

$D = \cancel{7396 - 19940}\ \ 7396z^2 - 19940 =$

$= 4(1849z^2 - 4985)$

$y = \dfrac{\pm\sqrt{4(1849z^2 - 4985)} + 86z}{10} =$

$= \pm 0{,}2\sqrt{1849z^2 - 4985} + 8{,}6z$

$81yz = 15y^2 + 817$

$z = \dfrac{15y^2 + 817}{81y}$

$\cancel{x = \dfrac{32y - 27z}{5}}$ $\quad 5x = 32y - 27z = 32y -$

$- 27 \cdot \dfrac{15y^2 + 817}{81y} = 32y - \dfrac{15y^2 + 817}{3y} =$

$= \dfrac{96y^2 - 15y^2 - 817}{3y} = \dfrac{81y^2 - 817}{3y} = x$

$x + y + z = \dfrac{81y^2 - 817}{3y} + y + \dfrac{15y^2 + 817}{81y}$

Задача 6 (продолжение 4)

$$81y(x+y+z) = 27(81y^2-817) + 81y^2 + 15y^2 + 817 =$$

$$= 2187y^2 - 817\cdot27 + 81y^2 + 15y^2 + 817 = 2283y^2 - 817\cdot26$$

$$x+y+z = \frac{2283y^2 - 21242}{81y}$$

$$x+y+z = \frac{32}{z-x} = \frac{2283y^2-21242}{81y}$$

$$z-x = \frac{15y^2+817}{81y} - \frac{81y^2-817}{3y} = \frac{15y^2+817-81\cdot27y^2+817\cdot27}{81y} =$$

$$= \frac{22876 - 2172y^2}{81y}$$

$$x+y+z = \frac{32}{z-x} = \frac{32\cdot81y}{22876-2172y^2} = \frac{2283y^2-21242}{81y}$$

$$32\cdot81^2y^2 = (2283y^2-21242)(22876-2172y^2)$$

$$32\cdot81^2y^2 = \cancel{2283\cdot2172y^4}\ 2283\cdot22876y^2 -$$

$$- 2283\cdot2172y^4 - 21242\cdot22876 + 21242\cdot2172y^2$$

$$32\cdot81^2y^2 = y^2(2283\cdot22876 - 21242\cdot2172) - 2283\cdot2172y^4 -$$
$$- 21242\cdot22876$$

$$t = y^2$$

$$2283\cdot2172\cdot t^2 + (32\cdot81^2 - 2283\cdot22876)t \cancel{+21242\cdot}$$

$$\ldots 21242\cdot22876 = 0$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 43294

Задание 6 (продолжение 5)

Решим ~~уг~~ квадратное уравнение

$$2283\cdot 2172\, t^2 + (32\cdot 81^2 - 2283\cdot 22876)\,t + 21242\cdot 22876 = 0$$

$$D = (32\cdot 81^2 - 2283\cdot 22876)^2 - 4\cdot 2283\cdot 2172\cdot 21242\cdot 22876 =$$

$$= 32^2\cdot 81^4 + 2283^2\cdot 22876^2 - 2\cdot 2283\cdot 22876\cdot 32\cdot 81^2 -$$

$$- 4\cdot 2283\cdot 2172\cdot 21242\cdot 22876 = 2283\cdot 22876\cdot$$

$$\cdot(2283\cdot 22876 - 2\cdot 32\cdot 81^2 - 4\cdot 21242\cdot 2283) + 32^2\cdot 81^4 = A$$

число A можно ~~вы~~ посчитать.

$$\cancel{t = \frac{\pm\sqrt{A} - (32\cdot 81^2 - 2283\cdot 22876)}{2\cdot 2283\cdot 2172}}$$

$y^2 = t \Rightarrow y = \sqrt{t}$ ($y > 0$ по условию) ~~⇒~~

$$t_1 = \frac{\sqrt{A} - (32\cdot 81^2 - 2283\cdot 22876)}{2\cdot 2283\cdot 2172}$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{A} - (32\cdot 81^2 - 2283\cdot 22876)}{2\cdot 2283\cdot 2172}$$

$\cancel{y = \sqrt{t} \Rightarrow}$ $y^2 = t \overset{(y>0)}{\Rightarrow} y = \sqrt{t} \Rightarrow y_1 = \sqrt{t_1}$, $y_2 = +\sqrt{t_2}$,

$\cancel{y_3 = \sqrt{t_2}}$, $\cancel{y_4 = -\sqrt{t_4}}$ (t_1 и $t_2 > 0$, если один из них $< 0 \Rightarrow$ ~~его просто~~ $y = \sqrt{t}$ не существует). Таким образом мы найдём все возможные значения y и подставим их в приведённые выше формулы $z(y)$ и $x(y)$ и найдём все значения x и y для каждого y. Это и

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 43294

Задание 1.

~~Д-м~~. $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 =$

$= (x^2 + x + 3)(x^2 - 5x + 7) + \cancel{8x^2}\ 7x^2 + 3 > 0$

$x^2 + x + 3 = 0$

$D = 1 - 3 \cdot 4 = -11 < 0$, к-т при $x^2 > 0 \Rightarrow$

$x^2 + x + 3 > 0$ при всех x

$x^2 - 5x + 7 = 0$

$D = 25 - 28 = -4 < 0$, к-т при $x^2 > 0 \Rightarrow$

$x^2 - 5x + 7 > 0$ при всех x

Тогда $(x^2 + x + 3)(x^2 - 5x + 7) > 0$ при всех x

$7x^2 \geqslant 0$ при всех x

Тогда $(x^2 + x + 3)(x^2 - 5x + 7) + 7x^2 + 3 > 0$

при всех $x \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 > 0$

при всех $x \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$

не имеет корней. Что и требовалось доказать

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 43294

Задание 3.

$y=\sin^2 x$

$y' = 2\cdot \sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

$y'' = (\sin 2x)' = \cancel{\cos x\cdot(2x)' = 2\cos x}\ \cos 2x\cdot(2x)' = 2\cos 2x$

$y''' = (2\cos 2x)' = -2\sin 2x\cdot(2x)' = -4\sin 2x$

~~По индукции докажем, что если производная (2n+1)-го порядка = $2^n \cos 2x$, то произв (база для n=1 доказана выше), то производная (2n+1)-го порядка = -2~~

$y'''' = (-4\sin 2x)' = -8\cos 2x$

$y''''' = 16\sin 2x$

~~Мы видим, что производные 4k+1, 4k+2 порядка ≥0,~~

~~а производные 4k+3 и 4k+4 порядка~~

~~$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$~~

~~Поэтому производ~~ ~~Давайте по индукции по n (где n-целое ≥0) докажем, что если производная (4n+1)-го порядка = $2^n \cdot \sin 2x$, то производная (4n+2)-го порядка = $2^{n+1}\cos 2x$, производная (4n+3)-го порядка = $-2^{n+2}\sin 2x$, производная (4n+4)-го порядка = -2^{n+}~~

Обозначим производную k-го порядка за $y(k)$

Тогда по индукции по k, где $k \geq 0$ и k-целое если ... $4k$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 43294

Задание 3 (продолжение)

$y^{(4k+2)} = 2^{4k+1}\cos 2x$, $y^{(4k+3)} = -2^{4k+2}\sin 2x$,

$y^{(4k+4)} = -2^{4k+3}\cos 2x$. (База для $n=0$ доказана выше). и $y^{(4(k+1)+1)} = 2^{4(k+1)}\sin 2x$

$y^{(4k+2)} = \left(y^{(4k+1)}\right)' = \left(2^{4k}\sin 2x\right)' = 2^{4k}\cdot\cos 2x\cdot(2x)' =$

$= 2^{4k+1}\cos 2x$

$y^{(4k+3)} = \left(y^{(4k+2)}\right)' = \left(2^{4k+1}\cos 2x\right)' = -2^{4k+1}\sin 2x\cdot(2x)' =$

$= -2^{4k+2}\sin 2x$

$y^{(4k+4)} = \left(y^{(4k+3)}\right)' = \left(-2^{4k+2}\sin 2x\right)' = -2^{4k+2}\cos 2x\cdot(2x)' =$

$= -2^{4k+3}\cos 2x$

$y^{(4(k+1)+1)} = \left(y^{(4k+4)}\right)' = \left(-2^{4k+3}\cos 2x\right)' =$

$= 2^{4k+3}\sin 2x\cdot(2x)' = 2^{4(k+1)}\sin 2x$

Переход доказан. Тогда $2019 = 4\cdot 504 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^{(2019)} = -2^{4\cdot 504+2}\sin 2x = -2^{2018}\sin 2x$

Ответ: $-2^{2018}\sin 2x$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

АЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 43294

Задание 4.

К - кол-во каменщиков, Б - кол-во бетонщиков ~~ников~~, П - кол-во плотников, Х - кол-во людей, владеющих двумя профессиями. Всего 32 ~~ра~~ бойца ⇒

~~32 = К~~ $32 = К + Б + П - Х$ (т.к. на пример если человек каменщ. и бетон. ~~владеет и К и Б~~, то мы посчит. его ~~2 раза и ее и в~~ и в ~~П~~ К и в Б и в Х ⇒ посчитали ровно 1 раз ~~, а если он~~, людей, владеющих сразу 3 профессиями нет).

$П = 2Б \Rightarrow Б = П/2$

$n \cdot П = К$, $3 \leq n \leq 20$

$Х = П + 2$

$32 = К + Б + П - Х = К + Б + П - (П+2) = К + Б - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow К + Б = 32 + 2 = 34.$

$К + П/2 = 34$

$2К + П = 68$

$П = 68 - 2К = nК$

$68 = (n+2)К$

$n - 2 \geq 0$, т.к. $n \geq 3 \Rightarrow n - 2 \geq 1$.

$К \neq 0$ иначе $(n-2)К = 0$, а это не так

К и б

~~числа К и n-2 целые, 68 = 17·4 ⇒ есть несколько вариантов (n≥0 и К≠0 иначе (n+2)К = 0 а это не так)~~

~~По условию $3 \leq n \leq 20 \Rightarrow 1 \leq n-2 \leq 18$~~

~~$2К \leq 68$ и $n+2 \geq 5$ ⇒~~

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 43294

Задание 4 (продолж.)

$$32 = П + Б + К - Х = П + \frac{П}{2} + nП - (П + 2)$$

$$32 = П + \frac{П}{2} + nП - П - 2$$

$$34 = П\left(1 + \frac{1}{2} + n - 1\right) = П\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$34 = П \cdot \frac{2n+1}{2}$$

~~П — целое число и~~

$$68 = П(2n+1)$$

$3 \leq n \leq 20$

$6 \leq 2n \leq 40$

$7 \leq 2n+1 \leq 41$

$68 \vdots 2n+1 \Rightarrow 2n+1$ — делитель 68

Делители 68: 1, 2, 4, 17, 34, 68

$7 \leq 2n+1 \leq 41 \Rightarrow$ ~~2n+1~~

$2n+1 =$ либо 17, либо 34.

$2n+1 = 34$

$2n = 33$

$n = 16{,}5$,

не по условию n — целое

$2n+1 = 17$

$2n = 16$

$n = 8$

$$П = \frac{68}{2n+1} = \frac{68}{17} = 4.$$

$Х = П + 2 = 6$

$П = 4$, $n = 8 \Rightarrow$ ~~$К = П \cdot n = 4 \cdot 8 = 32$, $Б = \frac{П}{2} = \frac{4}{2} = 2$~~

Кол-во бойцов, владеющих ровно одной профессией $= 32 - Х = 32 - 6 = 26$ (~~людей~~ нет бойцов, влад. 0 или 3 профессиями по условию)

Ответ: 26

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ...ЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 43294

Задание 2.

$15<16 \Rightarrow \sqrt{15}<\sqrt{16}=4.$, но $\sqrt{15}>3$, т.к. $15>9) \Rightarrow 3<\sqrt{15}<4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3>\sqrt{15}>-4 \Rightarrow 4-3>4-\sqrt{15}>4-4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1>4-\sqrt{15}>0$

$(4-\sqrt{15})^2+(4+\sqrt{15})^2 = 16+15-8\sqrt{15}+16+15+8\sqrt{15} =$

$= 31+31=62.$

$5>4+\sqrt{15}>4. \Rightarrow (4+\sqrt{15})^3>4^3=64 \Rightarrow (4+\sqrt{15})^3>62.$

$4+\sqrt{15}>1 \Rightarrow$ при увеличении x $(4+\sqrt{15})^x$ увелич.

т.к. $4-\sqrt{15}>0$ то $(4-\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^x$ (при $x>3$) $>$

$>(4-\sqrt{15})^3+(4-\sqrt{15})^3>(4-\sqrt{15})^3>64 \Rightarrow x<3.$

$(4-\sqrt{15})^x<1 \Rightarrow (4-\sqrt{15})^x<1. \Rightarrow$

$\Rightarrow (4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x \le 1+(4+\sqrt{15})^x$ при

$x<2$ $(4+\sqrt{15})^x<(4+\sqrt{15})^2<16+15+8\sqrt{15}=31+8\sqrt{15}<$

$<31+8\cdot 4<63$

$1+(4+\sqrt{15})^x<64.$ при $x<2.$

Ответ: $x<2$.