ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 38588

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30	100	сто	

N1

Когда часы показывали 3 часа, т.е. часовая стрелка была на 3, а минутная на 12, то расстояние между стрелками было $\frac{1}{4}$ всего круга. Часовая стрелка за час проходит $\frac{1}{12}$ круга, а минутная – 1 круг. Значит, минутная стрелка догоняет часовую со скоростью $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ круга/час. Значит, она догонит её через $\frac{1}{4}:\frac{11}{12}=$ $=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{11}=\frac{3}{11}$ часа $=\frac{3\cdot 60}{11}=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ минут.

Ответ: через $16\frac{4}{11}$ минут.

N2

$2018^2-1<2018^2$. Т.к. обе части положительны, то:

$\sqrt{2018^2-1}<2018 \quad |\cdot 2, \quad 2018^2-1=(2018-1)(2018+1)=2017\cdot 2019$

$2\sqrt{2017\cdot 2019}<2\cdot 2018 \qquad |+2\cdot 2018$

$2\cdot 2018+2\sqrt{2017\cdot 2019}<4\cdot 2018$

$2017+2019+2\sqrt{2017\cdot 2019}<4\cdot 2018$

$(\sqrt{2017})^2+(\sqrt{2019})^2+2\cdot\sqrt{2017}\cdot\sqrt{2019}<(2\cdot\sqrt{2018})^2$. Т.к. обе части

$(=(\sqrt{2017}+\sqrt{2019})^2$ положительны, то

$\sqrt{2017}+\sqrt{2019}<2\cdot\sqrt{2018}$

Ответ: $A<B$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38588

№3

$$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$$

$x^2+y^2 = x^2+2xy+y^2-2xy = (x+y)^2-2xy = (a-1)^2-2(a^2-7a+14) = a^2-2a+1-2a^2+14a-28 =$

$= -a^2+12a-27 = -(a^2-12a+27) = -(a^2-12a+36-9) = -(a-6)^2+9.$

Заметим, что у квадратного уравнения $t^2-t(a-1)+(a^2-7a+14) = 0$ есть корни x и y, т.к. по т. Виета $x+y=a-1$ и $xy=a^2-7a+14$.

Т.к. корни есть, то $D \geq 0$, т.е.

$(-a+1)^2-4\cdot1\cdot(a^2-7a+14) \geq 0$

$(a-1)^2 \geq 4(a^2-7a+14)$

$a^2-2a+1 \geq 4a^2-28a+56$

$0 \geq 3a^2-26a+55.$

Найдем корни сопутствующего уравнения $3k^2-26k+55=0$

По т. Виета $a_1=5$, $a_2=\frac{11}{3}$ - корни, т.к. $5+\frac{11}{3}=\frac{26}{3}$, $5\cdot\frac{11}{3}=\frac{55}{3}$.

Т.к. $0 \geq 3a^2-26a+55$, то $5 \geq a \geq \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$. $\Rightarrow$

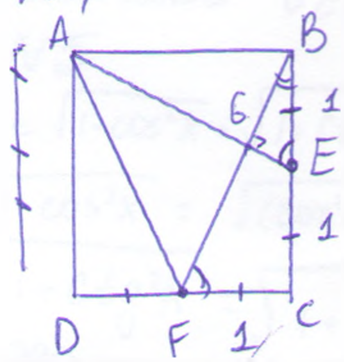
$-1 \geq a-6 \geq -2\frac{1}{3}$. Значит, ~~$|a-6| \leq 2\frac{1}{3} \Rightarrow$~~ $|a-6| \geq 1 \Rightarrow$

$(a-6)^2 \geq 1 \Rightarrow -(a-6)^2+9 \leq -1+9 = 8$. Т.е. $x^2+y^2 \leq 8$, причем 8 достигается при $a-6=-1$, т.е. $a=5$. (При $a=5$ в уравнении $t^2-t(a-1)+(a^2-7a+14)$ $D=0$ (~~t^2-4t+4~~) $\Rightarrow$

$t^2-4t+4=(t-2)^2 \Rightarrow x=y=2$, $x+y=a-1=4$, $xy=4=25-35+14$).

Ответ: $a=5$.

№4



Пусть сторона квадрата равна 2. Тогда, половины его стороны $BE = FC = \frac{1}{2}BC = 1$.

$AB = BC = 2$, $\angle ABC = \angle BCF = 90°$, т.к. $ABCD$ - квадрат.

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle BCF$ по I признаку равенства треугольников

$\Rightarrow \angle BFC = \angle BEA$.

$\angle BFC + \angle FBC = \angle BEA + \angle FBC = \angle BEG + \angle GBE = 90°$ 2

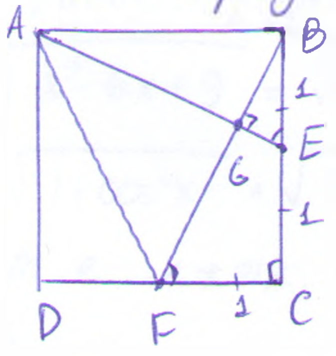
(в прямоугольном $\triangle FBC$) (продолжение на след. странице

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38588

N4 (продолжение)



$\angle BEG = \angle BFC$, $\angle BGE = \angle BCF \Rightarrow \triangle BEG \sim \triangle BFC \Rightarrow$

$\frac{BE}{BF} = \frac{GE}{FC} = \frac{BG}{BC}$. $\quad BG = \frac{BE}{BF}\cdot BC = \frac{2}{BF}$.

$BF = \sqrt{BC^2+FC^2} = \sqrt{5}$ по т. Пифагора в $\triangle BFC$.

$\cancel{BE = \frac{GE}{FC}\cdot BF} = \quad GE = \frac{BE}{BF}\cdot FC = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$S_{\triangle BFC} = \frac{BC\cdot FC}{2} = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$ (т.к. $\triangle BFC$ - прямоугольный). Аналогично, $S_{\triangle BGE} = \frac{BG\cdot GE}{2} = \underbrace{\left(\frac{BE}{BF}\cdot BC\right)}_{\text{„}BG\text{"}}\cdot\frac{GE}{2} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2\right)}_{\text{„}BG\text{"}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.

$\cancel{S}$ $S_{GECF} = S_{\triangle BFC} - S_{\triangle BGE} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

Т.к. $\triangle ABE = \triangle BCF$ (по доказанному), то $AE = BF = \sqrt{5} = \frac{5}{\sqrt{5}}$.

$AG = AE - EG = \frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

$GF = BF - BG = \frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Т.к. $\triangle AFG$ - прямоугольный, то $S_{\triangle AGF} = \frac{AG\cdot GF}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}}{2} =$

$= \frac{12}{5\cdot 2} = \frac{6}{5}$.

$\frac{S_{\triangle AGF}}{S_{GECF}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$. ($\cancel{S}$

√ молодец:)

Ответ: площадь $\triangle AGF$ больше площади четырехугольника $GECF$ в 1,5 раза.

N5

$y = \sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$.

$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$

$\sqrt{1+ctg^2 x} = \sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{1}{|\sin x|}$

продолжение на следующей ...

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

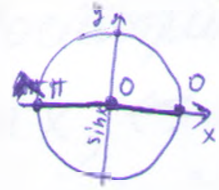
ШИФР 38588

N5 (продолжение)

$\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

$\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x} = |\sin x|\cdot\frac{1}{|\sin x|} = 1$, причем $\sin x \neq 0$,

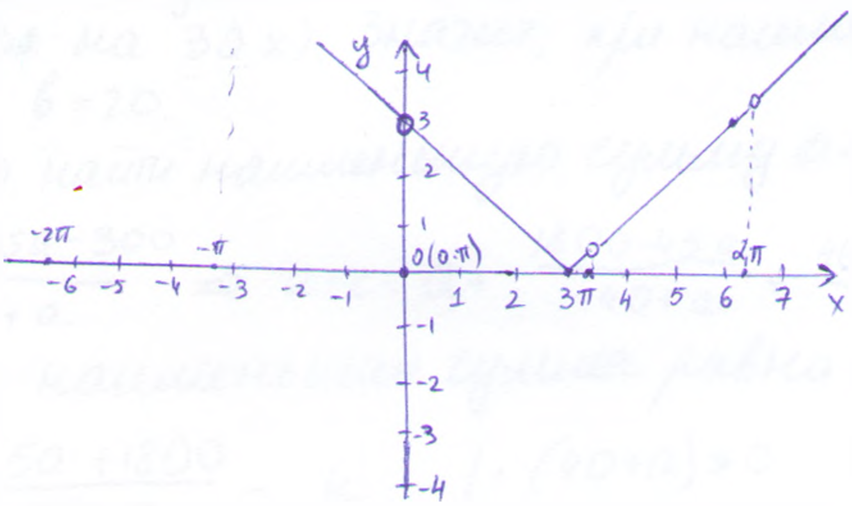
т.е. $x \neq \pi k$, где $k \in Z$



⇓

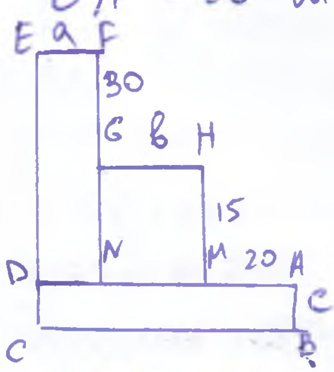
$y = \cancel{5}\,|x-3|$, где $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

~~f(x)=x y~~ График функции $y=|x-3|$ получается из графика функции $y=|x|$ смещением на 3 клетки вправо.



N6

Для начала докажем, что минимум достигается при $GH = 20$ м. Пусть $EF = a$, $GH = b$, $AB = c$.



По условию

$S_{участка} = S_{EFND} + S_{GHMN\,(NHM)} + S_{DABC} = EF\cdot ED + GH\cdot HM + DA\cdot AB =$
$= a\cdot(FG+GN) + b\cdot 15 + (a+b+20)\cdot c = \cancel{a\cdot 45}\ 45a+15b+(a+b+20)\cdot c = 2100.$

Минимальная длина ограждения — ~~не мен~~ ~~ше~~ периметра фигуры, т.к. меньше ~~перимет~~ ~~ра~~, т.е. $EF+FG+GH+HM+MA+AB+BC+CD+DE = a+30+b+15+20+c+(20+b+a)+(c+15+30) = 2(a+b+c)+130$. Значит, при

продолжение на следующей странице

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38588

N6 (продолжение)

Значит, при ~~меньш~~ наименьшем периметре (a+b+c) – сумма наименьшая. Зафиксируем (a+b) и посмотрим на эту сумму.

$c=\frac{2100-45a-15b}{20+a+b}$. Посмотрим, как изменится сумма, если a изменить на x, т.е. стороны станут $a_0=a+x$ и $b_0=b-x$. Новая сторона $c_0=\frac{2100-45a-45x-15b+15x}{20+a+x+b-x}=$

$=\frac{2100-45a-15b-30x}{20+a+b}$. Тогда, если $b>20$, то возьмем такое x, что $b_0=20$ $(x>0)$, тогда $a_0+b_0+c_0<a+b+c$. (т.к. $a_0+b_0=a+b$ не изменилось, а $c_0<c$, т.к. числитель уменьшился на 30x). Значит, при наименьшем периметре $b=20$.

Значит, надо найти наименьшую сумму (a+c).

$c=\frac{2100-45a-300}{40+a} \Rightarrow a+c=a+\frac{1800-45a}{40+a}=\frac{40a+a^2+1800-45a}{40+a}$

Пусть эта наименьшая сумма равна k, т.е:

$\frac{a^2-5a+1800}{40+a}=k \quad |\cdot(40+a)>0;$

$a^2-5a+1800=40k+ka$

$a^2-(k+5)a+1800-40k=0.$

Т.к. у этого уравнения есть решения, то его дискриминант неотрицателен, т.е:

$(k+5)^2\geq 4\cdot 1\cdot(1800-40k)$

$k^2+10k+25\geq 7200-160k$

$k^2+170k-7175\geq 0.$

Решим сопутствующее уравнение $x^2+170x-7175=0$. По т. Виета $x_1=-41.5$ и $x_2=7.5$ – корни, т.к. $x_1+x_2=-41.5+7.5=$ $=5\cdot(7-41)=5\cdot(-34)=-170$ и $x_1\cdot x_2=5\cdot(-41)\cdot 7.5=-287\cdot 25=$ $=-(200\cdot 25+7\cdot 25)=-(7000+175)=-7175$.

(продолжение на следующей стран.

N6 (продолжение)

$k^2+10k-7175 \geq 0$

$\Rightarrow$ $k \geq x_2$ или $k \leq x_1$, т.е. $k \geq 35$ или $k \leq -205$.

Т.к. $k \geq 0$, то $k = 35$ м

$k+5=40$, $1800-40k=400$

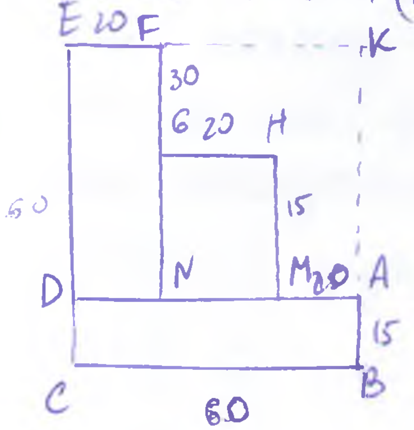
$a^2-40a+400=0$.

$(a-20)^2=0 \Rightarrow a=20$ м $\quad c=\dfrac{1800-45\cdot 20}{40+20}=\dfrac{900}{60}=15$ м

Значит, равенство достигается, если $a=20$ м $c=15$ м

Площадь фигуры в этом случае равна

$45\cdot 20+15\cdot 20+(20+20+20)\cdot 15=900+300+900=2100$ кв.м.,



а периметр $-130+2(a+b+c)=$

$=130+2\cdot 55=130+110=240$ м. $AB+HH+FG$ (AK=FN т.к. AKFN - прямоугольник)

$BK=AK+AB=FN+15=30+15+15=60$ м.

$KE=EF+FK=EF+GH+MA=20+20+\cancel{20}$ 20 $=\cancel{65}$ 60 м

$GH=20$ м.

Ответ: наименьшая длина - 240 м,

$BK=60$ м, $KE=\cancel{55}$ 60 м, $GH=20$ м.