ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 38079

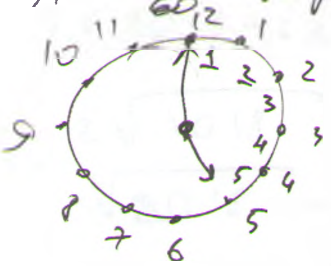
Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	20	30	100	сто	[signature]

Задание 1

Заметим, что минутная стрелка проходит полный круг за 60 минут, поэтому ее скорость это $\frac{1}{60}$ циферблата в минуту. Теперь заметим, что



часовая за 1 час проходит расстояние в 12 раз меньшее, т.к. проходит расстояние между двумя числами на часах, т.е. полный циферблат она проходит за 12 часов, а минутная - за 1. Поэтому часовая медленнее минутной в 12 раз и ее скорость это $\frac{1}{60}:12=\frac{1}{720}$ циферблата в минуту. Тогда, заметим, что в положении 5 часов, часовая смотрит на 5, а минутная на 12. Между 12 и 5 - 5 часов, т.е. $\frac{5}{12}$ циферблата. Итак, заметим, что минутная движется быстрее чем часовая, поэтому минутная стрелка будет „догонять" часовую, со скоростью $\frac{1}{60}-\frac{1}{720}=\frac{12-1}{720}=\frac{11}{720}$ циферблата в минуту. Т.к. расстояние между ними это $\frac{5}{11}$ циферблата, то ~~через~~ для того, чтобы минутная стрелка догнала часовую потребуется $\frac{5}{12}:\frac{11}{720}=\frac{5\cdot \cancel{720}^{60}}{\cancel{12}\cdot 11}=\frac{300}{11}$

продолжение на стр 2

d_mors

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38079

@ves_photos

стр 2

Задание 1 (продолжение)

$= \frac{300}{11}$ минут $= \frac{5}{11}$ часа.

Ответ: $\frac{300}{11}$ минут или $\frac{5}{11}$ часа.

№2

$\sqrt{2018} + \sqrt{2020} \vee 2\sqrt{2019}$ | возведем в квадрат, т.к. обе части положительны, то я могу это сделать, равносильность между строками останется

$\underbrace{2018+2020}_{4038=2\cdot2019} + 2\sqrt{2018}\cdot\sqrt{2020} \vee 4\cdot 2019$

$2\cdot 2019 + 2\sqrt{2018}\cdot\sqrt{2020} \vee 4\cdot 2019$ | $-2\cdot 2019$

$2\sqrt{2018}\cdot\sqrt{2020} \vee 2\cdot 2019$ | $:2$

$\sqrt{2018}\cdot\sqrt{2020} \vee 2019$ | возведем в квадрат: обе части опять же положительны, поэтому я могу это сделать, равносильность между строками останется

$2018\cdot 2020 \vee 2019^2$

$2018\cdot 2020 \vee \underbrace{2019^2-1}_{(2019-1)(2019+1)}+1$

$2018\cdot 2020 \vee 2018\cdot 2020+1$

$0 \vee 1$

$0<1$. Т.к. я осуществлял равносильные преобразования, то ~~верна~~ и в первой строке:

$\sqrt{2018}+\sqrt{2020} < 2\sqrt{2019}$.

№3

$$\begin{cases} x+y=a+1 \quad (1) \\ xy=a^2-7a+16 \quad (2) \end{cases}$$

Возведем (1) в квадрат и получим: $x^2+2xy+y^2=a^2+2a+1$ (3) вычтем из (3) два равенства (2), вычитая из правой части правую и из левой — левую

$x^2+2xy+y^2-2xy = a^2+2a+1-2a^2+14a-32$

$x^2+y^2 = -a^2+16a-31 = -(a-8)^2+64-31 = -(a-8)^2+33$

(продолжение на стр. 3)

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ШИФР 38079

стр. 3 (продолжение)

Итак, $x^2+y^2=-(a-8)^2+33$. ~~Т.к. $-(a-8)^2\le 0$, то (т.к. $-(a-8)^2+33\le 33$) максимум $x^2+y^2=-(a-8)^2+33$ это 33 и он достигается при $a=8$.~~

Теперь заметим, что: $x^2+2xy+y^2=a^2+2a+1$ (возведя (1) в квадрат.)

~~$4xy=4a^2-24a+16$~~

и что $4xy=4a^2-28a+64$ (умножив (2) на 4)

Найдем разницу и получим:

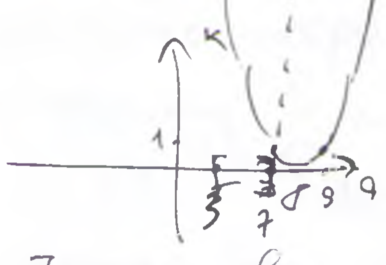
$$x^2-2xy+y^2=-3a^2+30a-63$$

$(x-y)^2=-3a^2+30a-63$. Т.к. квадрат неотрицателен, то $-3a^2+30a-63\geq 0 \quad |:-3$

$$a^2-10a+21\leq 0$$

$(a-7)(a-3)\leq 0$. Откуда $a\in[3;7]$.

Итак, нам надо найти максимум выражения $x^2+y^2=-(a-8)^2+33$ при $a\in[3;7]$. Чтобы x^2+y^2 было максимально, необходимо, чтобы $(a-8)^2$ было минимально. Т.к. $a\in[3;7]$, а минимум у ~~этой функции~~ этого кв. трехчлена достигается при $a=8$, то нам нужно выбрать ближайшее возможное к 8 значение a. Т.к. $a\in[3;7]$, то это 7 (см. рисунок)

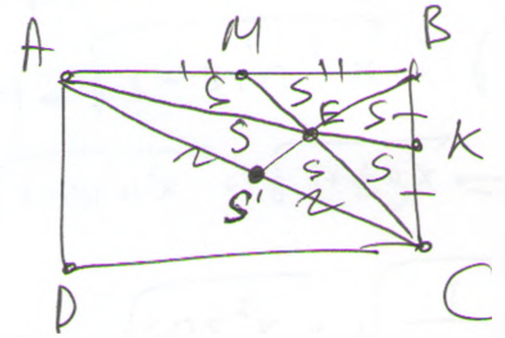


Итак, максимум $x^2+y^2=-(a-8)^2+33$ достигает при $a=7$ и равно 32. И достигается, например, при $x=y=4$.

Тогда в условии написано: $x+y=8$

$xy=16$

№ 4 стр 4



1) Проведём BE до пересечения с AC за точку E. Получив точку S'.

2) Заметим, что в $\triangle ABC$ тогда CM – медиана, AK – медиана, тогда, т.к. медианы в треугольнике пересекаются в одной точке, то и ~~BE – то~~ BS – тоже медиана.

Известно, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1 считая от вершины. Поэтому: Пусть $S_{\triangle AME}=S$. Тогда, $S_{\triangle BME}=S$, т.к. ME – медиана в $\triangle AEB$ и делит треугольник AEB на два равных по площади. Далее, т.к. $AE:EK=2:1$, то $S_{\triangle ABE}:S_{\triangle BEK}=2:1$. Т.к. $S_{\triangle ABE}=2S$, то $S_{\triangle BEK}=S$. В $\triangle BEC$ проведена медиана EK, поэтому $S_{\triangle BEK}=S_{\triangle KEC}=S$. Т.к. $BE:ES'=2:1$, то $S_{\triangle BCE}:S_{\triangle CES'}=2:1$. Т.к. $S_{\triangle BCE}=2S$, то и $S_{\triangle CES'}=S$. В $\triangle AEC$: ES – медиана, поэтому $S_{\triangle ES'C}=S_{\triangle ES'A}=S$. Итак, т.к. ABCD – прямоугольник, то $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}=\frac{a\cdot b}{2}$, где a и b соседние стороны прямоугольника. $S_{\triangle ABC}=6S$, поэтому $S_{\triangle ADC}=6S$. Итак, $S_{MBKE}=S_{MEB}+S_{BEK}=2S$. $S_{AECD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle AES'}+S_{\triangle ES'C}=6S+S+S=8S$.

Итак, $S_{AECD}>S_{MBKE}$, т.к. $8S>2S \Leftrightarrow 6S>0$ и очевидно, что $S>0$. И также $\frac{S_{AECD}}{S_{MBKE}}=\frac{8S}{2S}=4$. Итак, площадь AECD больше S_{MBKE} в 4 раза.

стр 5 Задание 5

$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+tg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4}$. Преобразуем:

$\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+tg^2 x}=\sqrt{\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{=1}-\sin^2 x}\cdot\sqrt{\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}}=$

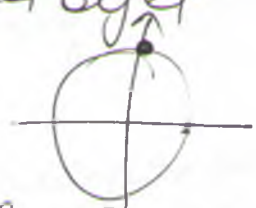
$=\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=1$ Откуда

$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+tg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4}=1\cdot\sqrt{x^2-4x+4}$.

(Стоит отметить, что ~~существует~~ $1-\sin^2 x\geq 0$, поэтому корень из выражения взять можно, а также, стоит отметить, что $1+tg^2 x>0$, т.к. $tg^2 x\geq 0$, а $1>0$)

Однако, $\sin x$ существует при $x\in R$, но $tg\,x$ существует при $x\in R\setminus(x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z)$

$tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$



(функция неопределена для точек вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, т.к. делить на 0 нельзя)

Итак, $y=\sqrt{x^2-4x+4}$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

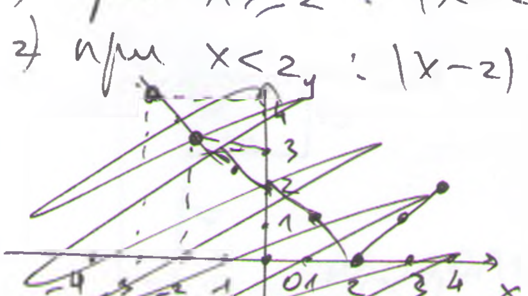
$y=\sqrt{(x-2)^2}$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$

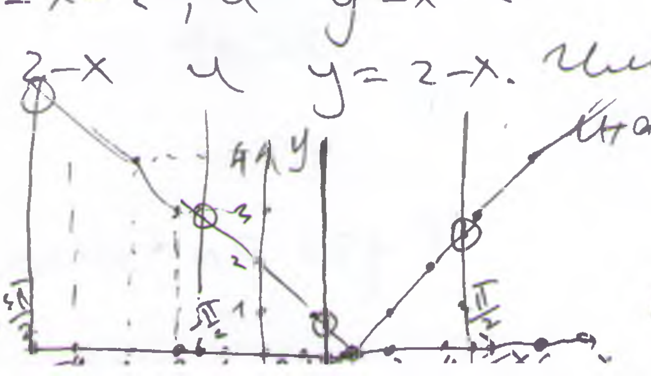
$y=|x-2|$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Итак, строим график и $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

1) при $x\geq 2$: $|x-2|=x-2$, и $y=x-2$

2) при $x<2$: $|x-2|=2-x$ и $y=2-x$. Имеем:





Итак, это график $y=|x-2|$, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, точки обозначены ⊙, если выколоты

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

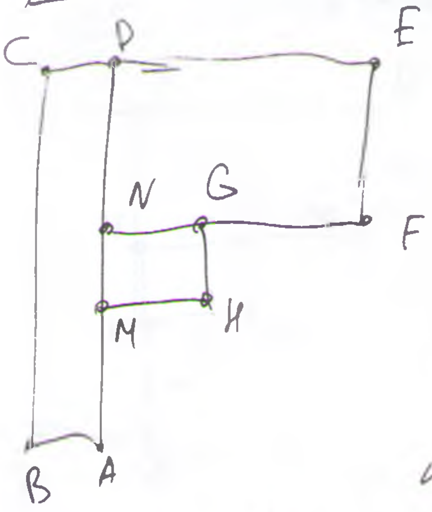
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38079

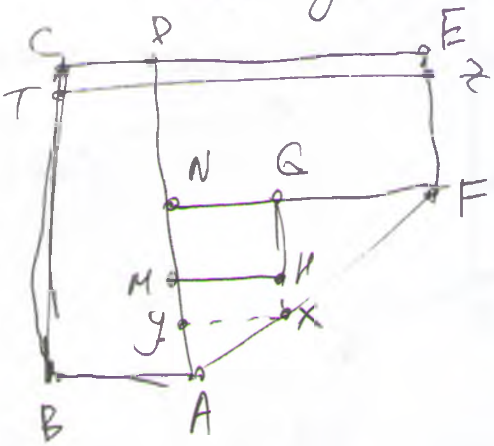
стр. 6

№ 6

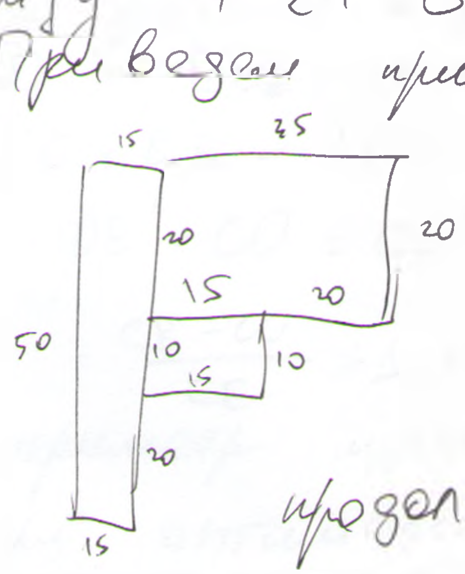


1) Рассмотрим выпуклую оболочку этих трех прямоугольников, она будет, очевидно, наименьшей по периметру фигурой, содержащей все три прямоугольника.

2) Если выпуклая оболочка это пятиугольник: и точка H не лежит на AF. Тогда давайте продлим GH за тчк H и пересечем ее с AF, получив точку X. Проведем параллельную ~~через~~ прямой MH через X, найдя точку Y (на рисунке.) Тогда, отметим прямоугольник со стороной CE и площадью MHXY (на картинке это будет CEZT. Тогда, вместо исходной базы рассмотрим базу TZFGXYAB, она будет оптимальнее.



• Приведем пример базы:



В таком случае длина ограждения это $15+35+20+20+10+15+20+15+50=$
$=50\cdot 4=200.$

продолжение на стр 7.

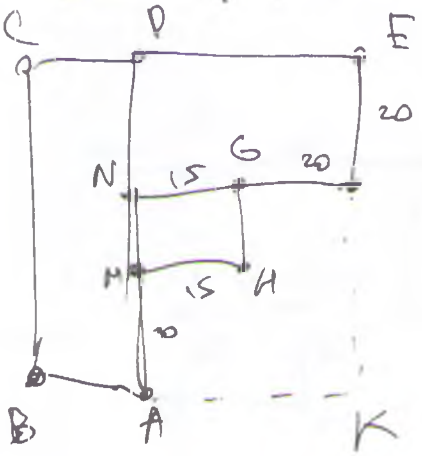
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38079

стр 7.

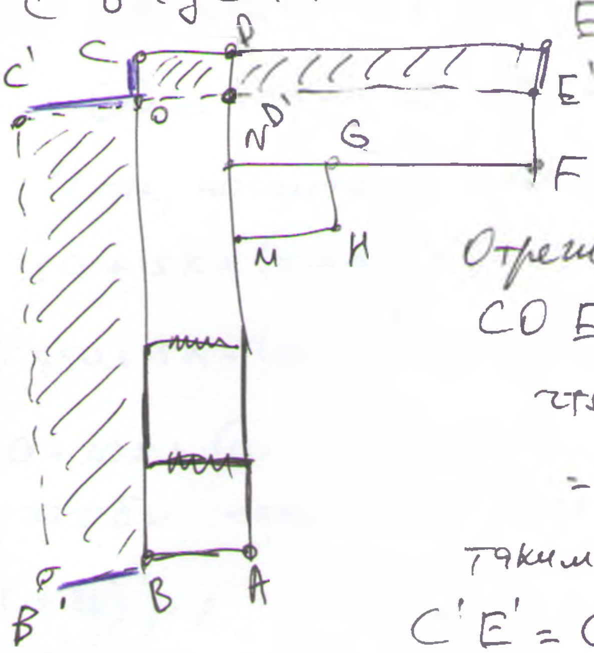
№6 Продолжение



(закрашенные части равны по площади)

Пусть ~~CE=CB~~ $CE \neq CB$. Тогда, проведем такую манипуляцию с базой:

(не умаляя общности $CB > CE$)



Отрежем кусок $COE'E$, такой, что $S_{COE'E} = S_{C'OB'B}$, таким образом, чтобы $C'E' = C'B'$

($COE'E$ и $C'OBB'$ - прямоугольники.) В таком случае, рассмотрим вместо исходного загона загон $AB'C'E'FGHM$, его площадь равна исходному, по построению. Теперь докажем, что по периметру ограждения тоже лучше:

мы добавили к длине забора $C'O$ и $B'B$, а убавили CO и EE', т.е. надо сравнить $C'O$ и CO, т.к. $C'O = B'B$ и $CO = EE'$. Итак, по построению:

$OE' \cdot CO = C'O \cdot OB$, откуда $\frac{CO}{C'O} = \frac{OB}{OE'} = \frac{OB}{CE} =$

$= \frac{CB - CO}{CE} > 1$ по построению, откуда добавленный периметр меньше того, который был. Откуда при оптимальном случае достигается $CE = CB$

(продолжение на стр 8)

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38079

Задание 6 (продолжение) стр 8

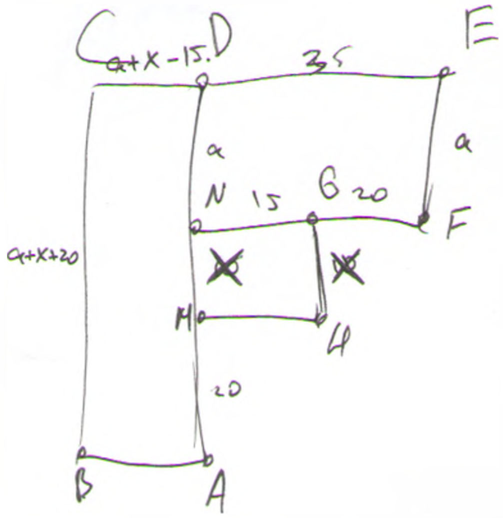
Тогда найдем минимум:

Пусть $EF=a$, а $GH=x=NH$.

Тогда $DA=a+x+20=CB$

$DE=NG+GF=35 \Rightarrow$

$CD=a+x+20-35=a+x-15$



Итак, посчитаем площадь:

$35a+15x+(20+a+x)(a+x-15)=$

$=35a+15x+(a+x)^2+5(a+x)-300=1600$

$40a+20x+(a+x)^2=1900.$ (1)

И нам нужно, чтобы периметр был минимален, т.е. $((a+x-15)+(a+x+20))\cdot 2 - \min = (a+x)\cdot 4+10$ было минимальным. Итак, перепишем (1) в виде:

$(a+x)^2+(a+x)\cdot 20+20a=1900.$

Если мы хотим, чтобы $(a+x)$ было как можно меньше, то надо взять максимально возможное a. Т.к. уравнение $(a+x)^2+(a+x)=const$, $(const+x)^2+(const+x)=const$

x будет увеличиваться с ростом $const$.

•) итак, у нас осталось $(a+x)^2+(a+x)\cdot 20+20a=1900.$

Берем min возможное $x-10$ и получаем:

$(a+10)^2+(a+10)\cdot 20+20a=1900$

$a^2+20a+20a+300+20a=1900$

$a^2+60a-1600=0.$

$(a+80)(a-20)=0$ Т.к. $a>0$, то единственный

далее на стр 9.

продолжение №6 (второе продолжение)
возможный корень это $a=20$.
Откуда и выходит пример указанный ранее.

?

Ответ дан на стр 6 сделан на 8 стр, при $y=20$. Решение на остальных как-то делалось страницах ???