

ШИФР

10409

Класс 10 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания Торный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	3	5	4	10	10	0	10	0	20	67	шестьдесят семь	

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9) \quad N1$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x+3)(x-3)$$

$$(x-3) \left((x-1)(x+5) - (x+3) \cdot x \right) = 0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$$\text{или } x^2-6x+5-x^2-3x=0$$

$$-9x = -5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Ответ: $\frac{5}{9}; 3$.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2 \quad N2$$

$$\begin{cases} x-1+3x+1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)(3x+1)} = 2-2x \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2-2x-1 = 4-8x+4x^2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=5 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Ответ: 1; 5

$$x^2-6x+5=0$$

по теореме Виета $x_1=1, x_2=5$

$\sqrt{3}$

$$\frac{2}{x+1} > \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x+1)(x+2) > 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

или

$$\begin{cases} 1-x \leq 0 \\ (x+1)(x+2) < 0 \end{cases}$$



нет решений

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t = \frac{11}{12}$$

$$12t + 6t + 4t = 11$$

$$22t = 11$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

оп3

N5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

Пусть $2^x = t, t \geq 0$, тогда

$$8t^2 + 1 \leq 6t$$

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$$

$$\frac{+1171+}{\frac{1}{4} \quad \frac{1}{2}} \rightarrow$$

$$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$$

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$x \in [-2; -1]$$

Ответ: $[-2; -1]$.

$$8t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{8}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = \frac{1}{4}$$

N6

Пусть авторских кошек было x , тогда швейцарских $(2x)$ кошек, а персидских $(3x)$ кошек и сибирских $(2x-13)$ кошек. Т.к. всего было 77 кошек, то

$$x + 2x + 3x + 2x - 13 = 77$$

$$9x = 90$$

$$x = 10$$

$$2x = 20 \text{ (кошек) - швейцарских}$$

$$3x = 30 \text{ (кошек) - персидских}$$

$$2x - 13 = 17 \text{ (кошек) - сибирских}$$

Ответ: 10 авторских, 20 швейцарских, 30 персидских, 17 сибирских

Т.к. $\lg 2$, $\lg(2^x+1)$ и $\lg(2^x-1)$ — ^{арифм.} прогрессия, то

$$\lg 2 = \frac{\lg(2^x+1) + \lg(2^x-1)}{2}$$

$$2 \lg 2 = \lg((2^x+1)(2^x-1))$$

$$\lg 4 = \lg(2^{2x}-1)$$

$$4 = 2^{2x}-1$$

$$2^{2x} = 5$$

$$2x = \lg_2 5$$

$$x = \frac{\lg_2 5}{2}$$

Ответ: $\frac{\lg_2 5}{2}$

№8

Т.к. окружности касаются друг друга поперечно, то они обрезают стороны треугольника. Пусть радиус каждой окр. x см, тогда одна сторона $(x+4)$ см, другая сторона $(x+6)$ см и гипотенуза 10 см. По теореме Пифагора

$$(x+4)^2 + (x+6)^2 = 10^2$$

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 12x + 36 = 100$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

по теор. Виета $x_1 = 2$

$x_2 = -12$ — не удовл. условию задачи

Ответ: 2 см.



ШИФР

10409

N10

$$\begin{aligned} A^3 &= (\sqrt[3]{5+2} - \sqrt[3]{5-2})^3 = 5+2 - 3\sqrt[3]{(5+2)^2 \cdot \sqrt[3]{5-2}} + \\ &+ 3\sqrt[3]{5+2} \cdot \sqrt[3]{(5-2)^2} - 5+2 = 4 - 3\sqrt[3]{(5+2)(5-4)} + 3\sqrt[3]{(5-4)(5-2)} \\ &= 4 - 3\sqrt[3]{5+2} + 3\sqrt[3]{5-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 + 3A &= 4 - 3\sqrt[3]{5+2} + 3\sqrt[3]{5-2} + 3\sqrt[3]{5+2} - 3\sqrt[3]{5-2} = \\ &= 4 \end{aligned}$$

Ответ: 4