ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 39851

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	10	20	20	30	95	девяносто пять	

Задание 5

$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\sqrt{x^2-6x+9}$

ОДЗ: $\begin{cases} 1-\cos^2 x\geq 0 \\ 1+ctg^2 x\geq 0 \\ x^2-6x+9\geq 0 \\ \sin x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x\in R}$ $\sin x\neq 0$

$\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$

$\sqrt{1+ctg^2 x}=\sqrt{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\frac{1}{|\sin x|}$

$\sqrt{x^2-6x+9}=|x-3|$

$y=|\sin x|\cdot\frac{1}{|\sin x|}\cdot|x-3|$

$y=|x-3|$, где $\sin x\neq 0$ т.е. $x\neq \pi n, n\in Z$

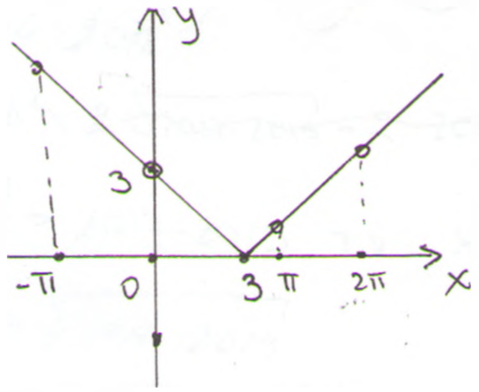


График $y=|x-3|$ – это график прямой $y=x-3$ после отражения его части, где $y<0$ относительно OX.
и т.к. $x\neq\pi n, n\in Z$, то в нём выкалываем мн-во точек $\{0;\pm\pi;\pm2\pi...$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 39851

Задание 1

Посчитаем скорости стрелок в °/мин (кол-во градусов/кол-во минут)

Минутная стрелка проходит 360° (полный циферблат) за 60 мин =>

$\Rightarrow v_м = \frac{360^\circ}{60 мин} = 6\ °/мин$

Часовая проходит 360° за 12 часов $\Rightarrow v_ч = \frac{360}{12\cdot 60} = \frac{1}{2}\ °/мин$.

Когда время в точности 3:00, то угол между стрелками равен 90° => чтобы найти момент, в который минутная догонит часовую нужно найти значение $\frac{90}{v_м - v_ч} =$

$= \frac{90}{6-\frac{1}{2}} = \frac{180}{12-1} = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$ => через $16\frac{4}{11}$ минут минутная догонит часовую.

Ответ: $16\frac{4}{11}$ (мин)

Задание 2

~~$A^2 = 2017+2019+2\sqrt{2017\cdot 2019}$, $B^2 = 4\cdot 2018$ } => можно сравнить числа $\sqrt{2017\cdot 2019}$ и 2018~~

~~$B^2 - A^2 = 2\sqrt{2017\cdot 2019} - 2\cdot 2018 = 2$~~

$2018^2 > 2017\cdot 2019$ т.к. $x^2 > \underbrace{(x-1)(x+1)}_{x^2-1}$

$2018 > \sqrt{2017\cdot 2019}$

$2\cdot 2018 > 2\sqrt{2017\cdot 2019} \Rightarrow 4\cdot 2018 > 2\cdot 2018 + 2\sqrt{2017\cdot 2019}$ $(\sqrt{2017}+\sqrt{2019})^2$

$2\sqrt{2018} > \sqrt{2017} + \sqrt{2019} \Rightarrow A < B$ переход равносилен, т.к. числа положительные.

Ответ: $B > A$

ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 39851

Задание 3

$\begin{cases} x+y=a-1 \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$ $\quad x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-2(a^2-7a+14)=$

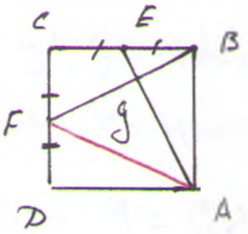
$=a^2-2a+1-2a^2+14a-28=-a^2+12a-27$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27=$

$x^2+y^2=-(a-6)^2+9$ т.к. $-(a-6)^2\leq 0$, то $x^2+y^2\leq 9$ и $x^2+y^2=9$ при $a=6$

Ответ: при $a=6$ есть еще одно условие: x, y, a — действительны!

Задание 4. Будем считать, что $S_{ABCD}=1$ ($AB=1$)



$S_{AgF}=S_{AFB}-S_{AgB}=\frac{1\cdot 1}{2}-S_{AgB}=\frac{1}{2}-S_{AgB}$

$(S_{AFB}=h\cdot AB\cdot\frac{1}{2}=BC\cdot AB\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2})$

$S_{AgF}=\frac{1}{2}-S_{AgB}=\frac{1}{2}-(S_{AEB}-S_{gEB})=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+S_{gEB}=\frac{1}{4}+S_{gE\ldots}$

$(S_{AEB}=EB\cdot AB\cdot\frac{1}{2}$, т.к. $\angle B=90^\circ \Rightarrow S_{AEB}=\frac{1}{4})$

Итого $S_{AgF}=\frac{1}{4}+S_{gEB}$

$S_{gECF}=S_{CBF}-S_{EgB}=\frac{1}{4}-S_{EgB}$ $(S_{CBF}=\frac{CB\cdot CF}{2}=\frac{1}{4})$

Итого $S_{gECF}=\frac{1}{4}-S_{gEB}(S_{EgB})$

$S_{AgF}=\frac{1}{4}+S_{gEB}>\frac{1}{4}-S_{gEB}=S_{gECF}$ (т.к. $S_{gEB}>0$)

$S_{AgF}>S_{gECF}$

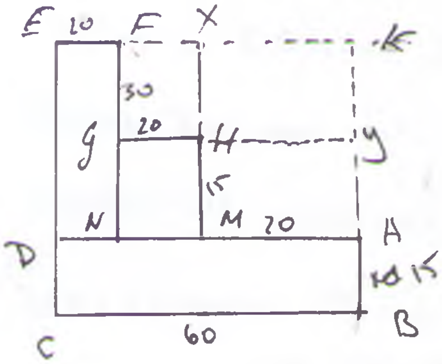
Ответ: $S_{AgF}>S_{gECF}$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 39851

Задание 6



Лемма: ~~У~~ Если ~~у гр~~ даны равновеликие прямоугольник и квадрат, то периметр квадрата ~~меньше~~ не больше периметра прямоугольника.

Док-во: $a\boxed{1}b$ $\quad x\boxed{2}x$ $\quad P_1 = 2(a+b)$

$P_2 = 4x = 4\sqrt{ab}$

$x^2 = a\cdot b \quad S_1 = S_2$

$x = \sqrt{ab}$

$4\sqrt{ab} \le 2(a+b)$ т.к.

$2\sqrt{ab} \le a+b$ т.к.

~~$\frac{P_1}{2} = a+b$~~

~~$\frac{P_2}{2} = 2x = 2\sqrt{ab}$~~

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0 \Rightarrow$ лемма доказана.
$(a, b > 0)$

$S_{AMHgFK} =$

$= gF\cdot gH + HM\cdot AM + AM\cdot gF$

Если $X = HM \cap FK$, то $gHXF$ – прямоугольник т.к. $\angle gFK = 90^\circ = \angle FgH = \angle gHX$, т.к. $\angle gFK = 180 - \angle gFE$

Если $y = gH \cap AK$, то $HMAy$ – прямоугольник ($HX \parallel gN$. Аналогично)

$HXKy$ – также прямоугольник, $\angle XHy = \angle gHM = 90^\circ$

$\angle HXK = 180 - \underset{=90^\circ}{\angle FXH} = 90^\circ = 180^\circ - \underset{=90^\circ}{\angle HyA} = \angle HyK$

Тогда $S_{AMHgFK} = S_{gHXF} + S_{HyKX} + S_{AyHM}$

$S_{gHXF} = Fg\cdot gH = 30gH$

$S_{HyAM} = HM\cdot AM = 15\cdot 20 = 300$

$S_{HyKX} = HX\cdot Hy = AM\cdot Fg = 20\cdot 30 = 600.$

Итого: $S_{AMHgFK} = 900 + 30gH$

Тогда $S_{CBKE} = S_{AMHgFK} + \overset{(2100)}{S_{ABCEFgHM}} = 3000 + 30gH$ ~~≥ 3600~~.

$\ge 3000 + 30\cdot 20$ (т.к. $gH \ge 20$) $= 3600$. Тогда чтобы ~~пер~~ периметр KBCE был наименьшим по Лемме нужно, чтобы KBCE был квадратом ~~, т.е. BK = 60 = BC~~ И наименьшая сторона ~~FG = ED, MH = gN => Fg+H~~ такого квадрата равна 60, т.к.

$S_{KBCE} \ge 3600.$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 39851

$HM = GN \Rightarrow FG + HM = FN = ED \Rightarrow FG + HM + AB = EC = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $FG = 30$, $HM = 15$, то $AB = 15$

~~Пусть также~~ $GH = 20 = AM \Rightarrow EF = BC - AM - GH = 20.$

(Если $GH > 20$, то $S_{KBCE} > 3600 \Rightarrow$ периметр будет не наименьшим)

Проверим $S_{ABCEFGHM} = 2100$

$S_{ABCEFGHM} = \cancel{AB} \cdot S_{ABCD} + S_{DEFN} + S_{NMHG} =$

$= AB \cdot BC + \overset{(HM+FG)\cdot EF}{DE \cdot DN} + GH \cdot HM = 15 \cdot 60 + 45 \cdot 20 + 20 \cdot 15 =$

$= 15 \cdot 60 + 20 \cdot 60 = 60 \cdot \cancel{45}\,35 = 30 \cdot 70 = 2100$

~~С другой стороны я уже доказ~~

$P_{BCEK} = 60 \cdot 4 = 240$, и как уже было доказано, периметр меньше быть не может.

$BK = KE = 60$, $GH = 20$

Ответ: наименьшая длина ограждения равна 240 м, при этом $BK = KE = 60$ м, а $GH = 20$ м.

(Нужно отметить, что чем больше ~~вс~~ площадь квадрата, тем больше и его периметр. Т.е. $x\,\boxed{1}$ $y\,\boxed{2}$ $S_1 > S_2$
$x^2 > y^2 \Rightarrow x > y \Rightarrow 4x > 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow P_1 > P_2$)

(Это я использую для фиксирования длин BC и BK).