ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 46060

Класс 10 Вариант 11 Дата Олимпиады 09.02.2019.

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ		Подпись
							Цифрой	Прописью	
Оценка	5	10	10	20	20	30	95	девяносто пять	[signature]

Задание 1.

Скорость минутной стрелки δ равна 1 дел/мин.

Скорость часовой $V = 5$ дел/час $= \frac{1}{12}$ дел/мин.

Тогда скорость их сближения $u = \delta - V = \frac{11}{12}$ дел/мин.

В заданное время расстояние между стрелками было равно 25 делениям.

$5 \cdot 5 = 25$

Тогда если t минут — время до встречи стрелок, то $ut = 25 \Rightarrow t = \frac{25}{u} = \frac{300}{11}$ мин $= \frac{5}{11}$ ч.

Ответ: через $\frac{5}{11}$ часа минутная стрелка догонит часовую.

Задание 2.

Оценим разность: $B - A = 2\sqrt{2019} - \sqrt{2018} - \sqrt{2020} =$

$= (\sqrt{2019} - \sqrt{2018}) - (\sqrt{2020} - \sqrt{2019})$.

$\sqrt{2019} - \sqrt{2018} = \frac{(\sqrt{2019} - \sqrt{2018})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}} = \frac{2019 - 2018}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}} = \frac{1}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}}$

Аналогично $\sqrt{2020} - \sqrt{2019} = \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}}$.

$\sqrt{2020} + \sqrt{2019} > \sqrt{2019} + \sqrt{2018} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} < \frac{1}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}}$,

значит, $(\sqrt{2020} - \sqrt{2019}) < (\sqrt{2019} - \sqrt{2018})$, то есть $B - A > 0$

Ответ: $B > A$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 46060

Задание 3.

① $x+y=a+1 \Rightarrow (x+y)^2=(a+1)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy=a^2+2a+1;$

② $xy=a^2-7a+16 \Rightarrow 2xy=2a^2-14a+32;$

$S=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2+2a+1-2a^2+14a-32=-a^2+16a-31=$

$=-(a^2-16a+64-64+31)=-((a-8)^2-33)=-(a-8)^2+33.$

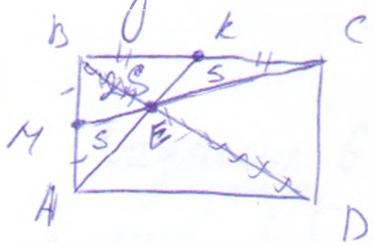
$-(a-8)^2\leq 0$, значит $S\leq 33$.

Тогда при $a=8$ $S=33$.

Наибольшее значение $x^2+y^2=33$ принимается при $a=8$.

есть решение? Требование: x,y — действительные

Задание 4.



По теореме Менелая для $\triangle KAB$ и секущей CM: $\frac{KE}{EA}\cdot\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BC}{CK}=1 \Rightarrow$

$\frac{KE}{EA}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}=1 \Rightarrow \frac{KE}{AE}=\frac{1}{2}$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \Rightarrow b=2a$; $\frac{b}{a+b}=\frac{2a}{3a}$

Аналогично для $\triangle MCB$ и секущей AK: $\frac{ME}{CE}=\frac{1}{2}$.

(по т. Менелая)

Заметим, что у $\triangle BCM$ и $\triangle KCE$ есть общий угол $\angle BCE$

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin(a;b)$

Поэтому $\frac{S_{KCE}}{S_{BCM}}=\frac{KC}{BC}\cdot\frac{EC}{MC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$

Если $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$, то $\frac{b}{a+b}=\frac{2}{3}$.

Аналогично для $\triangle EAM$ и $\triangle KAB$ и угла $\angle EAB$

$\frac{S_{EAM}}{S_{KAB}}=\frac{AE}{AK}\cdot\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$ Значит, что $S_{BCM}=S_{KAB}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$

Если $S_{EAM}=S$, то $S_{BKEM}=2S$. и $S_{CKE}=S$;

$S_{BCM}=3S=\frac{1}{4}S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD}=12S$; $S_{AECD}=S_{ABCD}-4S=8S.$

Значит $S_{AECD}=4S_{MBKE}$ 4 — Ответ.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 46060

Задание 5. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$

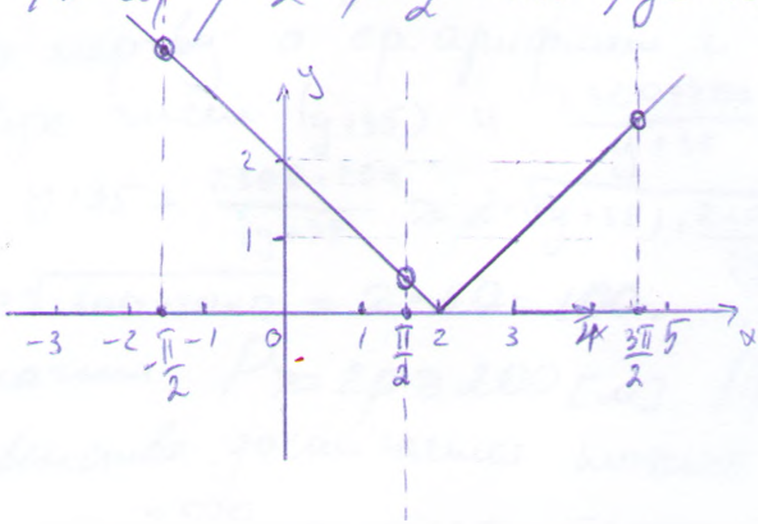
$\sqrt{1+tg^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|}$

$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$y = |\cos x| \cdot \frac{1}{|\cos x|} \cdot |x-2|$;

$y = |x-2|$ / $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. т.к. $\cos x \neq 0$

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.



В этом графике $y=|x-2|$ все точки с x-координ. равными $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ выколоты.

Задание 6.

Пусть длина $EF = x$[метров]; $AB = y$[м]; $GH = a$[м].

Тогда длина ограждение $P = (EF + FK + AK + AB) \cdot 2$ [м]

$FK = GH + AH = a + 20$ [м]

$AK = GF + MH = 35$ [м]

$P = 2p$. Если P - наименьшее, то p тоже наименьшее и наоборот.

$p = EF + FK + AK + AB = x + y + a + 55$.

Заметим, что $1600 = S_{BKEC} + S_{MHGN} - S_{AKFN} =$

$= (y+35)(x+a+20) + 15a - 35(a+20) = xy + ay + 20y + 15a + 35x$.

Имеем

$x(35+y) = 1600 - ay - 20y - 15a$; $/ : (y+35) > 0$

$x = \frac{1600 - ay - 20y - 15a}{y+35}$;

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 46060

$$p=x+y+a+55=\frac{1600-ay-20y-15a}{y+35}+\frac{35y+y^2}{y+35}+\frac{35a+ay}{y+35}+\frac{1925+55y}{y+35}=$$

$$=\frac{3525-ay-20y-15a+35y+y^2+ay+35a+55y}{y+35}=$$

$$=\frac{3525+70y+y^2+20a}{y+35}=\frac{y^2+70y+1225+2300+20a}{y+35}=$$

$$=\frac{(y+35)^2}{y+35}+\frac{2300+20a}{y+35}=(y+35)+\frac{2300+20a}{y+35}.$$

По нер-ву о ср. арифмет и ср. геометр. для двух чисел $(y+35)$ и $\frac{2300+20a}{y+35}$:

$$p=y+35+\frac{2300+20a}{y+35}\geq 2\cdot\sqrt{(y+35)\cdot\frac{2300+20a}{(y+35)}}=2\sqrt{2300+20a}\geq$$ т.к. $a\geq 10$

$$\geq 2\sqrt{2300+20\cdot 10}=2\cdot 50=100.$$

Значит $P\geq 2p\geq 200$ [м]. При наим. дл. ограждения $a=10$ [м]

Равенство достигается только тогда, когда

$$y+35=\frac{2500}{y+35}\Rightarrow y+35=50\Rightarrow y=15.$$

Имеем: $x+15+10+55=100\Rightarrow x=20$ [м].

Тогда
$$\begin{cases} BK=AB+AK=y+35=50\,[\text{м}].\\ EK=EF+FK=x+a+20=50\,[\text{м}].\\ GH=a=10\,[\text{м}].\end{cases}$$
~~при~~ при наименьшей длине ограждения.