ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

**ШИФР** 38484

Класс 10 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19

Площадка написания КНИТУ

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ Цифрой | Σ Прописью | Подпись |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Оценка | 5 | 10 | 10 | 20 | 20 | ∅ | 65 | шестьдесят пять | [illegible] |

№ 3. $\begin{cases} x+y=a-1 & (1) \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$

(1) Возведем обе части в квадрат и преобразуем полученное

$x^2+y^2=a^2-2a+1-2xy$

$\begin{cases} x^2+y^2=a^2-2a+1-2(a^2-7a+14) & (1.1) \\ xy=a^2-7a+14 \end{cases}$

(1.1) Преобразуем получившееся

$x^2+y^2=a^2-2a+1-2a^2+14a-28$

$x^2+y^2=-a^2+12a-27.$

Нетрудно заметить, что справа мы видим график функции вида $y=ax^2+bx+c$, но в данном случае переменную x мы заменили на переменную a

Рассмотрим свойства функции.

Т.к. коэффициент перед $a^2$ меньше нуля функция, а точнее её ветви расположены ниже относительно вершины ⇒ в вершине $x^2+y^2$ будет максимальным.

Координаты вершины следующие $y_0=9$; $a_0=6$ ⇒

При $a=6$ сумма $x^2+y^2$ – максимальна

Ответ: 6.

V –

Нужно учесть требование его решений (x и y) быть действительными

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

**ШИФР** 3848Н

№2. $\sqrt{2017}+\sqrt{2019} \vee 2\sqrt{2018}$

Возведем в квадрат и получим

$4036+2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 4\cdot 2018$

Вычтем из каждой стороны 4036 и получим

$2\sqrt{2017\cdot 2019} \vee 4036$

Возведем в квадрат и получим

$4\cdot 2017\cdot 2019 \vee (2\cdot 2018)^2$

Поделим на и 4 получим

$2017\cdot 2019 \vee 2018^2$

$\left.\begin{array}{l} 2018^2=4072324 \\ 2017\cdot 2019=4072323 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2017}+\sqrt{2019}<2\sqrt{2018}$

Ответ: $\sqrt{2017}+\sqrt{2019}<2\sqrt{2018}$

№1. Минутная стрелка имеет скорость 6 градусов в минуту (т.к. каждый сектор $=30^\circ$ ($360^\circ:12=30^\circ$), она его проходит за 5 минут $\Rightarrow V_м=$ 6 градусов в минуту)

Аналогично с часовой, она имеет 0,5 градусов в минуту

Во время 3 часов угол между ними равен $90^\circ \Rightarrow$

$90+0{,}5x=6x$, где $x$ – время, за которое минутная догонит часовую, $90^\circ$ - расстояние между ними

$5{,}5x=90$

$x=\frac{900}{55}=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$ минуты

Ответ: через $16\frac{4}{11}$ минуты.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

ШИФР 38484

№5. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$

Разберем все по отдельности

1) $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$

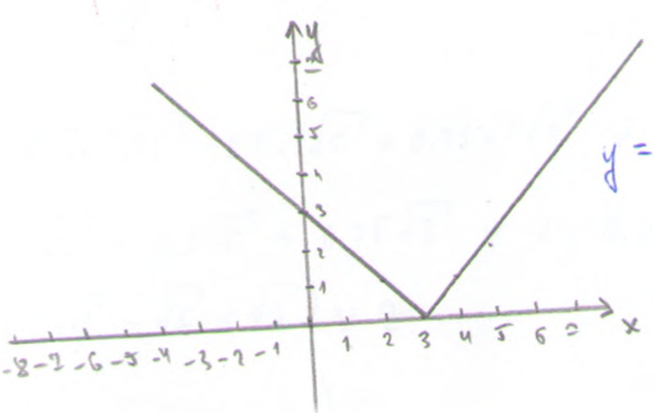
2) $\sqrt{1+ctg^2 x}=\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{\dfrac{\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}}=$

$=\sqrt{\dfrac{\sin^4 x+\cos^2 x(\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}}=\sqrt{\dfrac{\sin^4 x+\cos^2 x(2\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}}=$

$=\sqrt{\dfrac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^2 x}}=\sqrt{\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^2 x}}=\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}}=\dfrac{1}{|\sin x|}$

3) $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$

$y=|\sin x|\cdot\dfrac{1}{|\sin x|}\cdot|x-3|=|x-3|$

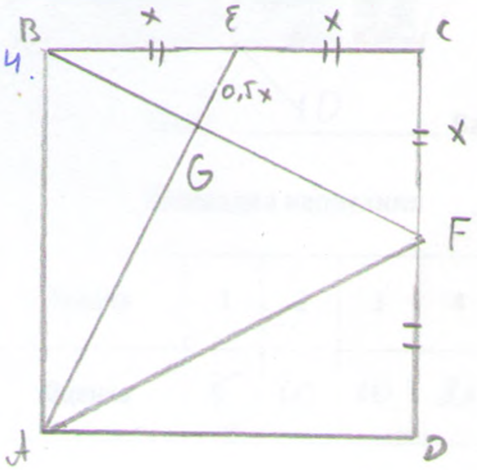



$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+ctg^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

**ШИФР** 38484.

№4.




1) Р. $\triangle BEG$ и $\triangle BFC$, они подобны $\angle FBC$ – общий; $\angle BGE = \angle BCF = 90^\circ$; $k = \frac{1}{2}$ => $EG = \frac{1}{2} CF$

2) Пусть сторона квадрата $= 2x$ => $CF = x$; $EG = 0,5x$

3) Р. $\triangle BEG$ – прямоугольный, по т. Пифагора $BG = 0,5x \cdot \sqrt{3}$; $S_{\triangle BEG} = \frac{0,25x^2\sqrt{3}}{2}$ $(S_\triangle = EG \cdot BG \cdot \frac{1}{2})$

4) $S_{EGCF} = S_{BCF} - S_{BGE} = x^2 - \frac{0,25x^2\sqrt{3}}{2}$ $(S_\triangle BCF = BC \cdot CF : 2 = x^2)$

5) Р. $\triangle BCF$; – прямоугольный по т. Пифагора $BF = x\sqrt{5}$ =>

=> $GF = BF - BG = x\sqrt{5} - 0,5x\sqrt{3}$

6) Р. $\triangle BEA$; аналогично $EA = x\sqrt{5}$; $AG = AE - EG = x\sqrt{5} - 0,5x$.

7) $S_\triangle AGF = AG \cdot GF \cdot \frac{1}{2} = \frac{(x\sqrt{5} - 0,5x)(x\sqrt{5} - 0,5x\sqrt{3})}{2}$

8) Сравним площади $\triangle AGF$ и $EGCF$

$$\frac{(x\sqrt{5} - 0,5x)(x\sqrt{5} - 0,5x\sqrt{3})}{2} \vee x^2 - \frac{0,25x^2\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$5x^2 - 0,5x^2\sqrt{15} - 0,5x^2\sqrt{5} + 0,25x^2\sqrt{3} \vee 2x^2 - 0,25x^2\sqrt{3} \quad | : x^2$$

$$5 - 0,5\sqrt{15} - 0,5\sqrt{5} + 0,25\sqrt{3} \vee 2 - 0,25\sqrt{3} \quad | +0,25\sqrt{3}$$

$$5 - 0,5(\sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3}) \vee 2.$$

$(\sqrt{15} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \approx 3,7.)$

$5 - 0,5 \cdot 3,7 \vee 2.$

$5 - 1,85 \vee 2$

$3,15 > 2$ => $S_\triangle AGF > S_{EGCF}$

Ответ: $S_\triangle AGF > S_{EGCF}$