ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12964

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	3	5	10	10	15	5	10	73	семьдесят три	

№1

$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$

$(x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) = 0$

$(x-3)(x^2-5x-x+5-x^2-3x) = 0$

$(x-3)(-9x+5) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{9} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{5}{9}$; 3

№2

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1}\right)^2 = 4$

$x - 1 + 2\sqrt{(x-1)(3x+1)} + 3x + 1 = 4$

$\left(2\sqrt{(x-1)(3x+1)}\right)^2 = (4-4x)^2$

$4(x-1)(3x+1) = 16 - 32x + 16x^2$

$4(3x^2 + x - 3x - 1) = 16 - 32x + 16x^2$

$12x^2 + 4x - 12x - 4 = 16 - 32x + 16x^2$

$4x^2 - 24x + 20 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-5)(x-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Проверка:

$\sqrt{1-1}+\sqrt{3\cdot1+1}=2$

$0+2=2$, верно

$\sqrt{5-1}+\sqrt{15+1}=2$

$2+4=2$

$6=2$, неверно

Следовательно корень уравнения равен 1

Ответ: 1

№3

$$\frac{2}{x+1}\geq\frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}\geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)}\geq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\leq 0$$



$$\begin{cases} x<-2 \\ -1<x\leq 1 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;1]$

№4

$$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$$

$$\log_3 x+\log_{3^2} x+\log_{3^3} x=\frac{11}{24}$$

$$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=\frac{11}{24}$$

$$\frac{11}{6}\log_3 x=\frac{11}{12}$$

$\log_3 x = \frac{11 \cdot 6}{12 \cdot 11}$

$\log_3 x = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$

№5

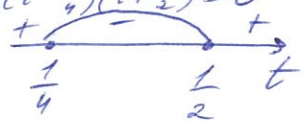
$8 \cdot 4^x + 1 \le 6 \cdot 2^x$

$(2^x)^2 \cdot 8 - 6 \cdot 2^x + 1 \le 0$

Пусть $2^x = t$, тогда

$8t^2 - 6t + 1 \le 0$

$(t - \frac{1}{4})(t - \frac{1}{2}) \le 0$



$\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}$

Обратная замена

$\begin{cases} 2^x \le \frac{1}{2} \\ 2^x \ge \frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} x \le -1 \\ x \ge -2 \end{cases}$

Ответ: $\{-1\} \cup \{-2\}$

$8t^2 - 6t + 1 = 0$

$D = 36 - 32 = 4$

$t_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16}$

$t_1 = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{1}{4}$

№6

Пусть x - сибирские кошки
y - персидские кошки
a - персидские кошки
b - сиамские кошки

Тогда их сумма x+y+a+b или 77 шт, по условию $b = 2y$; $a = 1{,}5b$; $x = a - 13$; получим систему уравнений

$$\begin{cases} b = 2y \\ a = 1{,}5b \\ x = a - 13 \\ a + b + x + y = 77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \\ x = 17 \\ y = 10 \end{cases}$$

$b = \frac{a}{1{,}5}$

$y = \frac{a}{3}$

$a + \frac{a}{1{,}5} + a - 13 + \frac{a}{3} = 77$

$2a + \frac{2a + a}{3} = 90$

$3a = 90$

$a = 30$

$b = \frac{30}{1{,}5} = 20$

$x = 30 - 13 = 17$

$y = \frac{20}{2} = 10$

Ответ: 17 сибуронов; 10 аторонов; 30 перонцев; 20 сиамсит.

№ 8

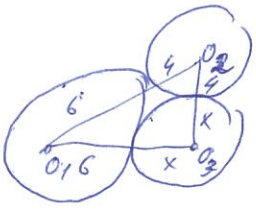
Дано: $\triangle O_1O_2O_3$

$R_1 = 6$ см O_1 – окр (R_1)

$R_2 = 4$ см O_2 – окр (R_2)

O_3 – окр (R_3)

Найти: R_3



Пусть $R_3 = x$, тогда по теореме Пифагора

$10^2 = (6 + x)^2 + (x + 4)^2$

$100 = 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2$

$2x^2 + 20x + 52 = 100$

$2x^2 + 20x - 48 = 0$

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = -14$

т. $R_3 = 2$

Если расположить окружности на других вершинах, то не будет выполняться: сумма 2-х сторон треугольника меньше 3-ей стороны

Ответ: 2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12964

№10

Дано:
$A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Найти: A^3+3A

$A^3 = \sqrt{5}+2 - 3\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2}\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} +$

$+ 3\cdot\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt{5}+2 =$

$= 3\sqrt[3]{(5-4)}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + = 3\sqrt[3]{5-4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} -$

$- 3\cdot\sqrt[3]{5-4}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 2 = 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right) + 2$

$A^3+3A = 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right) + 2 +$

$+ 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right) = 2$

Ответ: 2

№7

$\lg 2,\ \lg(2^x-1),\ \lg(2^x+1)$

ОДЗ
$\begin{cases} 2^x-1>0 \\ 2^x+1>0 \end{cases}$
$\begin{cases} 2^x>1 \\ 2^x>-1 \end{cases}$
$2^x>1$

$\frac{\lg 2 + \lg(2^x+1)}{2} = \lg(2^x-1)$

$\lg(2(2^x+1)) = \lg(2^x-1)^2$

$\lg\frac{2(2^x+1)}{(2^x-1)^2} = 0$

$\frac{2(2^x+1)}{(2^x-1)^2} = 1$

$2\cdot 2^x+2 = (2^x)^2 - 2\cdot 2^x + 1$

$(2^x)^2 - 4\cdot 2^x - 1 = 0$

Пусть $2^x = t$, тогда

$t^2-4t-1=0$

$D = 16+4 = 20$

$t_{1,2} = \frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2}$

$t_1 = 2+\sqrt{5}$

$t_2 = 2-\sqrt{5}$

$t^2-4t-1=0$

$\begin{cases} t = 2+\sqrt{5} \\ t = 2-\sqrt{5} \end{cases}$

Обратная замена:

$\begin{cases} 2^x = 2+\sqrt{5} \\ 2^x = 2-\sqrt{5}, \text{ не уд. ОДЗ} \end{cases}$

$x = \log_2(2+\sqrt{5})$

Ответ: $\log_2(2+\sqrt{5})$

№9

$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ tgx + tgy = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$\begin{cases} tg(x+y) = 1 \\ tgx + tgy = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} = 1 \\ tgx+tgy = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$\begin{cases} tgx+tgy = 1-tgx\cdot tgy \\ tgx+tgy = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$\begin{cases} y = arctg\,\frac{3-2\sqrt{3} \pm \sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{3-2\sqrt{3} \pm \sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$

$tgx = 3-2\sqrt{3} - tgy$

$3-2\sqrt{3} - tgy + tgy = 1-(3-2\sqrt{3}-tgy)\cdot tgy$

$3-2\sqrt{3} = 1 - 3tgy + 2\sqrt{3}\cdot tgy + tg^2y$

$tg^2y + tgy(2\sqrt{3}-3) + 2\sqrt{3} - 2 = 0$

$D = (2\sqrt{3}-3)^2 - 4\cdot(2\sqrt{3}-2) =$

$= 12 - 12\sqrt{3} + 9 - 8\sqrt{3} + 8 =$

$= 29 - 20\sqrt{3}$

$tgy = \frac{3-2\sqrt{3} \pm \sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}\right.$; $arctg\,\frac{3-2\sqrt{3}+\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$ / $\frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{3-2\sqrt{3}-\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$; $arctg\,\frac{3-2\sqrt{3}-\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$