ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11 640

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	0	20	85	восемьдесят пять	

№1 $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9) \Leftrightarrow (x-3)((x-1)(x-5)-x(x+3))=0 \Leftrightarrow (x-3)(-9x+5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{5}{9}$; 3.

№2.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1})^2=4 \\ x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3x+1}=4 \\ x\geq 1 \\ x\geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}\sqrt{3x+1}=2(1-x) \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x+1)=4(1-x)^2 \\ x\geq 1 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x+1)=4(1-x)^2 \\ x\geq 1 \\ x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3x^2-2x-1=4-8x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

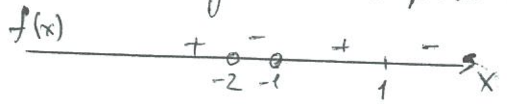
Ответ: 1

№3

$\frac{2}{x+1}\geq\frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x+2)}\geq 0$

Воспользуемся обобщенным методом интервалов

$f(x)=\frac{1-x}{(x+1)(x+2)}$



Выберем промежутки со знаком „+" $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$.

№4

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12} \Leftrightarrow \log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12} \Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = \frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$

№5.

$8 \cdot 4^x + 1 \le 6 \cdot 2^x \Leftrightarrow 8 \cdot (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 1 \le 0$

Пусть $t = 2^x$, тогда $\begin{cases} 8t^2 - 6t + 1 \le 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\frac{1}{4} \le 2^x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \le \log_2(2^x) \le \log_2\left(\frac{1}{2}\right)$ (Логарифмируем все части неравенства по основанию 2)

$-2 \le x \le -1 \Leftrightarrow x \in [-2; -1]$

Ответ: $[-2; -1]$

№6

Кошки: Сибирские: $3x - 13$
Ангорские: x
Персидские $3x$
Сиамские: $2x$

Обозначим за x - количество ангорских кошек, тогда сиамские $2x$, персидских $3x$, а сибирских $3x - 13$. Так как всего их 77, составим ур-е

$3x - 13 + x + 3x + 2x = 77 \Leftrightarrow 9x = 90 \Leftrightarrow x = 10$

Ответ: Сибирских: 17; ангорских: 10; персидских: 30; сиамских: 20.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11640

№7

Пусть a_1 первый член арифметической прогрессии $a_1 = \lg 2$. n-й член прогрессии равен $a_n = a_1 + (n-1)d$ (где d-разность прогрессии, а $n \in \mathbb{N}$), тогда $a_2 = \lg 2 + d$ $a_3 = \lg 2 + 2d$

Но $a_2 = \lg(2^x - 1)$, $a_3 = \lg(2^x+1)$. Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} \lg(2^x-1) = \lg 2 + d \\ \lg(2^x+1) = \lg 2 + 2d \\ x>0 \\ \cancel{x \neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \lg(2^x-1) - \lg 2 \\ \lg(2^x+1) = \lg 2 + (\lg(2^x-1) - \lg 2)\cdot 2 \\ x>0 \\ \cancel{x\neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg(2^x+1) = 2\lg(2^x-1) - \lg 2 \\ x>0 \\ \cancel{x\neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 2 = \lg(2^x-1)^2 - \lg(2^x+1) \\ x>0 \\ \cancel{x\neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lg\left(\frac{(2^x-1)^2}{(2^x+1)}\right) = \lg 2 \\ x>0 \\ \cancel{x\neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2^x-1)^2}{2^x+1} = 2 \\ x>0 \\ \cancel{x\neq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^2 - 2\cdot 2^x + 1 = 2\cdot 2^x + 2 \\ \cancel{x\neq 0} \; x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x)^2 - 4\cdot 2^x - 1 = 0 \\ \cancel{x\neq 0} \; x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = 2+\sqrt5 \\ 2^x = 2-\sqrt5 \quad <0 \Leftrightarrow \cancel{x \in \varnothing} \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \begin{cases} x = \log_2(2+\sqrt5) \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_2(2+\sqrt5)$$

Ответ: $\log_2(2+\sqrt5)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

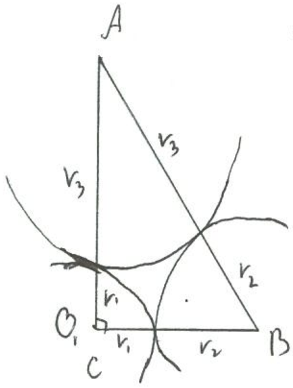
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11640

№8

Дано:

$C = O_1$
$B = O_2$
$A = O_3$
$r_2 = 4$ см
$r_3 = 6$ см



$r_1 = ?$

Касатся окружности будут в точках ~~на~~ при-надлетащих сторонам треугольника. В любом другом случае они пересекутся. Наименьшая окружность будет в точке C потому что при таком располотении гипотенуза будет минималь-ной. $r_3 + r_2 = 6 + 4 = 10$ см. При другам выборе радиусов будут увеличиваться катеты, а соответсвено и гипотенуза (~~на~~ $r_1 = 6$ $r_3 = 4$).

Составим уравнение $(4 + r_1)^2 + (6 + r_1)^2 = 100$ (по т. Пифагора) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 52 + 2r_1^2 + 20r_1 = 100 \Leftrightarrow r_1^2 + 10r_1 - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r_1 = 2 \\ r_1 = -12 \end{array}\right.$

$r_1 = -12 < 0$ - Посторонний корень.

$\Downarrow$

$r_1 = 2$ см

Ответ: 2 см

№10

Дано:

$A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

Найти: $A^3 + 3A$

Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} = a$, а $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = b$, тогда $A = a - b$

$(a-b)^3 + 3(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3 + 3a - 3b \Rightarrow$

$= a^3 - b^3 - 3a(ab-1) + 3b(ab-1) = a^3 - b^3 + (ab-1)(3b-3a) =$

$= a^3 - b^3 + (ab-1)(b-a) \cdot 3$

Подставим вместо a и b изначальные выратени

$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right) \cdot 3 =$

$= \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 2 + \left(\sqrt[3]{5-4} - 1\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right) \cdot 3 = 4$

Ответ: 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11640

№9

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tgx+tgy=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-y \\ tg(\frac{\pi}{4}-y)+tgy=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-y \\ \frac{tg\frac{\pi}{4}-tgy}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tgy}+tgy=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-y \\ \frac{1-tgy}{1+tgy}+tgy=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}-y \\ tgy\neq-1 \\ \frac{1-tgy+tgy+tg^2y}{1+tgy}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1+tg^2y}{1+tgy}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \Leftrightarrow 1+tg^2y=3-2\sqrt{3}+(3-2\sqrt{3})tgy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg^2y+(2\sqrt{3}-3)tgy+2\sqrt{3}-2=0$$

$$D=29-20\sqrt{3}$$

$$tgy=\frac{3-2\sqrt{3}\pm\sqrt{29-20\sqrt{3}}}{2}$$