ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14235

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания Горный Университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	0	0	8	10	10	15	5	20	77	семьдесят семь	

1. $(x-1)(x-3)(x-5) = x(x-3)(x+3)$

$(x-3)(x^2-x-5x+5-x^2-3x)=0$

$(x-3)(-9x+5)=0$

либо $x-3=0$, $x=3$ либо $-9x+5=0$, $x=\frac{5}{9}$

Ответ: $x=3;\frac{5}{9}$

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$ ОДЗ: $x \geq 1$

левая часть строго возрастает с увеличением x, т.к. $\sqrt{x-1}$ строго возрастает и $\sqrt{3x+1}$ строго возрастает

Значит, существует только одно решение, т.к. при всех больших значениях левой части будет больше.

Заметим, что при $x=1$ $\sqrt{1-1}+\sqrt{3+1}=2 \Rightarrow$ мы нашли единств. корень.

Ответ: $x=1$

~~$3 \cdot \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$ ОДЗ: $x \neq -1, -2$~~

~~$\frac{1}{\frac{x+1}{2}} \geq \frac{1}{\frac{x+2}{3}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} \leq \frac{x+2}{3}$~~

~~$3x+3 \leq 2x+4$~~

~~$x \leq 1$~~

~~Ответ: $x \in (-\infty; 1] \setminus \{-1\} \setminus \{-2\}$~~

4. $\log_3 x + 2\log_3 x + 3\log_3 x = \frac{11}{12}$ т.к. $\log_{3k}(a) = k\log_3(a)$

ОДЗ: $x > 0$

$\log_3 x\,(1+2+3) = \frac{11}{12}$

$x = 3^{\frac{11}{72}}$

Ответ: $x = 3^{\frac{11}{72}}$

5. $8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

~~$1 \leq 2^x(6 - 2^x \cdot 8) \mid \log_2$~~

~~$0 \leq x + \log_2(6 - 2^x \cdot 8)$~~

$8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$

$t = 2^x$

$8 \cdot t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 8 \cdot 4 \cdot 1}}{16} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{16} = \frac{4}{16};\ \frac{8}{16}$

$\Rightarrow$ где вып. нер-ва $t \in [t_1; t_2]$, т.к. коэф. при $t^2 > 0$

$\Rightarrow$ $2^x \geq \frac{1}{4}$ и $2^x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq -2$ и $x \leq -1$

Ответ: $x \in [-1; -2]$

6. ~~пусть кол-во n_1 – кошки сибирской породы, n_2~~

пусть n_1 – кол-во кошек сибирской породы, n_2 – кол-во кошек ангорской породы, n_3 – кол-во кошек персидской породы, n_4 – кол-во кошек сиамской породы.

$$\begin{cases} n_4 = 2n_2 \\ n_3 = 1{,}5\,n_4 \\ n_1 = n_3 - 13 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_2 = \frac{n_4}{2} = \frac{3n_3}{3} \cdot \frac{1}{2} = n_3 \cdot \frac{1}{3} \\ n_4 = \frac{2}{3} n_3 \\ n_1 = n_3 - 13 \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 77 \end{cases}$$

подставим в посл. равенство

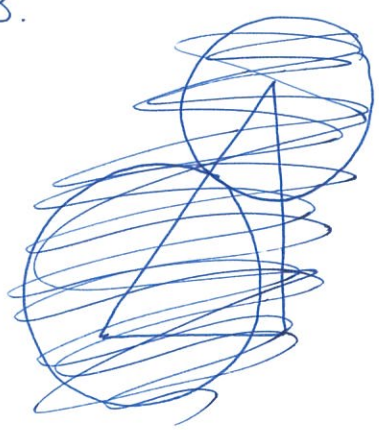
$n_3 - 13 + \frac{n_3}{3} + n_3 + \frac{2}{3} n_3 = 77$

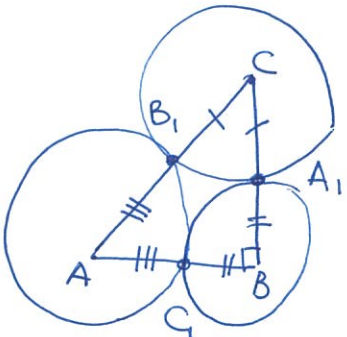
$3n_3 = 90$

$n_3 = 30 \Rightarrow n_1 = 17;\ n_2 = 10;\ n_4 = 20$

6. Ответ: было 17 кошек сибирской породы, 10 кошек американской породы, 30 кошек персидской породы и 20 кошек сиамской породы.

8.





$\angle CBA = 90°$

A_1, B_1, C_1 – точки касания окружностей.

$CA_1 = CB_1$

Т.к. A_1, B_1 лежат на окружности с центром C

также
$A_1B = C_1B$
$C_1A = AB_1$

Т.к. гипотенуза больше обоих катетов и равна сумме двух радиусов, то ее составляют два максимальных радиуса. $\Rightarrow CA = 6+4 = 10$ см

пусть искомый радиус равен r

тогда катеты равны $6+r$ и $4+r$

по т. Пифагора (сумма квадратов катетов = квадрату гипотенузы)

$10^2 = (6+r)^2 + (4+r)^2 = 36 + 12r + r^2 + 16 + 8r + r^2 = 52 + 20r + 2r^2$

$2r^2 + 20r + 52 - 100 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 2 \cdot 4 \cdot 48}}{4} = -5 \pm \sqrt{25+24} = -5 \pm 7 = 2; -12$

Т.к. $r > 0$ $r = 2$

Ответ: радиус меньшей окружности равен 2

10. $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$A^3 = \sqrt{5} + 2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5} + 2 =$

$= 4 - 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)} =$

$= 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$A^3 + 3A = 4$

Ответ: 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14235

7. пусть разность искомой арифметической прогрессии $= d$
тогда

$$\lg 2 + d = \lg(2^x - 1) \quad |\wedge 10 \qquad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$2 \cdot 10^d = 2^x - 1$$

$$\lg(2^x - 1) + d = \lg(2^x + 1) \quad |\wedge 10$$

$$(2^x - 1) \cdot 10^d = 2^x + 1$$

$$2 \cdot 10^d (2^x - 1) = 2(2^x + 1)$$

$$(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 1)$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$t = 2^x$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \qquad \sqrt{5} > 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{5} < 0$$

$$\Rightarrow t = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

Ответ: $x = \log_2(2+\sqrt{5})$

9.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ tg(x) + tg(y) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ tg(x) + tg(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases}$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{4} - x) = \cos\tfrac{\pi}{4}\sin x - \cos x \sin\tfrac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{4} - x) = \cos\tfrac{\pi}{4}\cos x + \sin\tfrac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\cancel{tg(\tfrac{\pi}{4} - x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = 1 + \frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}} =}$$

$$\cancel{= 1 + \frac{2}{1 + ctg x}}$$

$$\cancel{\text{пусть } t = tg(x)}$$

$$\cancel{t + 1 + 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{t}} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}$$

$$\cancel{t + 1 + 2 \cdot \frac{t}{t+1} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}$$

$$\cancel{t^2 + t + t + 1 + 2t = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)t + \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}$$

$$\cancel{t^2 + (4 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2))t + 1 - \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) = 0}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14235

9.

$$tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=1+\frac{-2\cos x}{\sin x+\cos x}=1-2\cdot\left(\frac{1}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}\right)=$$

$$=1-2\cdot\frac{1}{1+tg(x)}$$

пусть $t=tgx$

$$t+1-2\frac{1}{1+t}=3-2\sqrt{3}$$

$$t(1+t)-2=2(1+t)-2\sqrt{3}(1+t)$$

$$t+t^2-2=2+2t-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}t$$

$$t^2+(1-2+2\sqrt{3})t-2-2+2\sqrt{3}=0$$

$$t_{1,2}=\frac{1-2\sqrt{3}\pm\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2-4\cdot2(2\sqrt{3}-2)}}{2}=\frac{1-2\sqrt{3}\pm\sqrt{13+4\sqrt{3}-8\sqrt{3}+16}}{2}=$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}\pm\sqrt{29-4\sqrt{3}}}{2}$$

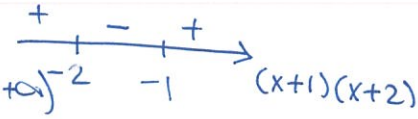
Ответ: $x=\operatorname{arctg}\left(\frac{1-2\sqrt{3}\pm\sqrt{29-4\sqrt{3}}}{2}\right)+\pi k,\ y=\frac{\pi}{4}-x$

$k\in\mathbb{Z}$

3. $\frac{2}{x+1}\geq\frac{3}{x+2}$ ОДЗ: $x\neq-1;\ x\neq-2$

пусть $(x+1)(x+2)>0$

т.е. $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;+\infty)$



$2(x+2)\geq3(x+1)$

$1\geq x \Rightarrow x\in(-1;1]$

пусть $(x+1)(x+2)<0$

т.е. $x\in(-2;-1)$

$2(x+2)\leq3(x+1)$

$2x+4\leq3x+3$

$1\leq x \quad \cap\ (-2;-1)=\varnothing$

Ответ: $x\in(-1;1]$