

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$


ШИФР 10135

 Класс 10 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.17

 Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	4	5	10	10	10	15	0	20	84	восемьдесят четыре	

1. $(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$
 $(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$
 $(x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) = 0$
 $(x-3)(x^2-5x-x+5 - x^2-3x) = 0$
 $(x-3)(-9x+5) = 0$
 $x=3$ или $-9x+5=0$
 $-9x = -5$
 $x = \frac{5}{9}$

 Ответ: $\frac{5}{9}; 3$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$
 $\sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x-1}$
 $3x+1 = (2 - \sqrt{x-1})^2$
 $3x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1$
 $2x = 2 - 4\sqrt{x-1} \quad | : 2$
 $x = 1 - 2\sqrt{x-1}$
 $2\sqrt{x-1} = 1-x$
 $4(x-1) = (1-x)^2$
 $4x-4 = 1-2x+x^2$
 $x^2-6x+5=0$
 $\begin{cases} x_1=5 \text{ (не удов)} \\ x_2=1 \end{cases}$

Проверка

$$\sqrt{1-1} + \sqrt{3+1} = 2$$

$$2=2$$

023 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x \geq -1 \end{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$
 $x \in [1; +\infty)$

$$\sqrt{5-1} + \sqrt{15+1} \neq 2$$

$$6 \neq 2$$

Ответ: 1

ШИФР

10135

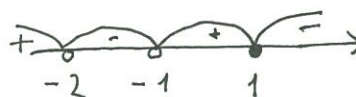
3. $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$ ОДЗ $x \neq -1, x \neq -2$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$


 $x \in (-\infty; -2) \cup \underline{1}; 1]$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \underline{1}; 1]$

4. $\log_3 x + \log_3 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$ ОДЗ $x > 0$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{5}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x = \frac{11 \cdot 6}{12 \cdot 11}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{3}$$

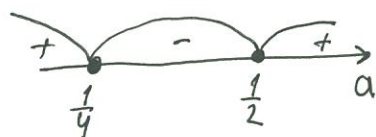
Ответ: $\sqrt{3}$

5. $8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$
 $8 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$
 $8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$
 пусть $a = 2^x$, $a > 0$
 $8a^2 - 6a + 1 \leq 0$

$D = 36 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

$a_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ $a_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$(a - \frac{1}{2})(a - \frac{1}{4}) \leq 0$



$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$

~~$-2 \leq x$~~

$-2 \leq x \leq -1$

Ответ: $[-2; -1]$

6. $\left. \begin{array}{l} \text{Сиб. } 1,5 \cdot 2x - 13 \\ \text{Ам. } x \\ \text{Пер. } 1,5 \cdot 2x \\ \text{Сам. } 2x \end{array} \right\} 77$

$1,5 \cdot 2 \cdot 10 - 13 = 17$ - сиб.

10 - ам.

$1,5 \cdot 2 \cdot 10 = 30$ - перс.

$2 \cdot 10 = 20$ - сам.

Ответ: 17 сибирской; 10 амурской, 30 персидской, 20 саманской.

$1,5 \cdot 2x - 13 + x + 1,5 \cdot 2x + 2x = 77$

$3x - 13 + x + 3x + 2x = 77$

$9x = 90$

$x = 10$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

10135

$$\begin{aligned} 7. \quad a_1 &= \lg 2 \\ a_2 &= \lg(2^x - 1) \\ a_3 &= \lg(2^x + 1) \end{aligned}$$

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = \lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1)$$

$$\lg \frac{2^x - 1}{2} = \lg \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

$$\frac{2^x - 1}{2} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

$$(2^x - 1)(2^x - 1) = 2(2^x + 1)$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 - 2 = 0$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\text{пусть } a = 2^x, \quad a > 0$$

$$a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$a_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

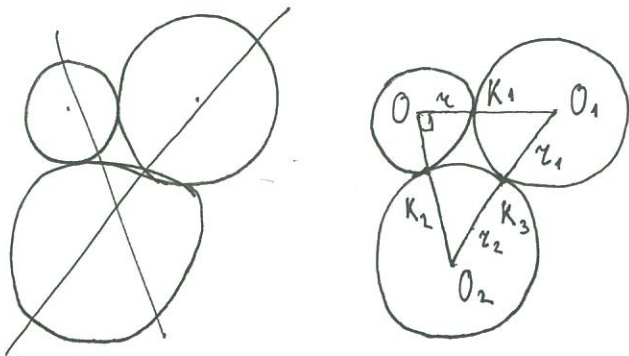
$$a_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5} \text{ (не удовн укл)}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

$$\text{Ответ: } \log_2(2 + \sqrt{5})$$

8.



Дано: $Окр(O)$ $Окр(O_1)$ $Окр(O_2)$
 $\triangle OO_1O_2$ - прямоугольн

(·) K_1 - точка касания $Окр(O)$ и $Окр(O_1)$
 (·) K_2 - точка касания $Окр(O)$ и $Окр(O_2)$
 (·) K_3 - точка касания $Окр(O_1)$ и $Окр(O_2)$

$r_1 = 4$ м $r_2 = 6$ м

Найти: r

1) В $\triangle$ против большей стороны лежит больший угол $\Rightarrow \angle K_1OK_2 = 90^\circ$

2) $K_1 \in OO_1$, $K_2 \in OO_2$, $K_3 \in O_1O_2$
 $r = OK_1 = OK_2$, $r_1 = O_1K_1 = O_1K_3$, $r_2 = O_2K_2 = O_2K_3 \Rightarrow$
 $OO_2 = r + K_2O_2 = r + r_2$
 $OO_1 = r + K_1O_1 = r + r_1$
 $O_1K_3 + K_3O_2 = r_1 + r_2$

3) По т. Пифагора в $\triangle OO_1O_2$ имеем: $OO_2^2 = OO_1^2 + O_1O_2^2$

$$(r + r_2)^2 = (r + r_1)^2 + (r_1 + r_2)^2$$

$$100 = (r + 6)^2 + (r + 4)^2$$

$$100 = 36 + 12r + r^2 + 16 + 8r + r^2$$

$$2r^2 + 20r - 48 = 0 \quad | :2$$

$$r^2 + 10r - 24 = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = -12 \text{ (не удовн)} \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

$$r = 2$$

Ответ: 2

10. $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

пусть $t = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ $\frac{1}{t} = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$$A = t - \frac{1}{t}$$

$$A^3 + 3A = \left(t - \frac{1}{t}\right)^3 + 3\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^3 - 3t^2 \cdot \frac{1}{t} + 3 \cdot t \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + 3t - \frac{3}{t} =$$

$$t^3 - 3t + \frac{3}{t} - \frac{1}{t^3} + 3t - \frac{3}{t} = t^3 - \frac{1}{t^3}$$

вернемся к замене

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 = \sqrt{5}+2 - (\sqrt{5}-2) = \sqrt{5}+2 - \sqrt{5}+2 = 4$$

Ответ: 4