

ШИФР 5100

Класс 10 Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания Торский университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	5	4	0	9	10	14	14	0	65	шесть-десять пять	<u>ЗЗ</u>

51

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 5$$

$$\text{Пусть } t = x^2 - 2x$$

$$(t + 2)(t - 2) = 5$$

$$t^2 - 4 = 5$$

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) D = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$(2) D = 4 - 12 < 0 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 3; x_2 = -1$$

52

$$\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$$

$$\sqrt{3x-3} = 4 + \sqrt{x-3}$$

$$3x-3 = 16 + 8\sqrt{x-3} + x-3$$

$$2x-16 = 8\sqrt{x-3} \quad | :2$$

$$x-8 = 4\sqrt{x-3}$$

$$(x-8)^2 = 16(x-3)$$

$$x^2 - 16x + 64 = 16x - 48$$

$$x^2 - 32x + 112 = 0$$

$$D = 4096 - 448 = 256$$

$$x_{1,2} = \frac{32 \pm 16}{2} \Rightarrow x_1 = 8$$

$$x_2 = 24$$

Ответ: $x_1 = 8$; $x_2 = 24$

53

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2-x} < x^2$$

$$\frac{-x^3 + x^2 + x - 1 - x^2(2-x)}{2-x} < 0$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1 - x^2 + x^3}{2-x} < 0$$

$$\frac{x-1}{2-x} < 0$$

(интервалы)

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x-3 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 3$$

Д.у.:

$$x \geq 0$$

$$x \geq 8$$

ОДЗ:

$$2-x \neq 0$$

$$x \neq 2$$

$$\lg(3n-1) - \frac{1}{2} \lg(n+1) = \frac{1}{2} \lg(n+13)$$

$$\lg(3n-1) - \lg \sqrt{n+1} - \lg \sqrt{n+13} = 0$$

$$\lg\left(\frac{3n-1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+13}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3n-1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+13}} = 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} n > -1 \\ n > -13 \\ \underline{n > -1} \end{cases}$$

Д.у.:

$$3n-1 \geq 0$$

$$\underline{n \geq \frac{1}{3}}$$

$$3n-1 = \sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n+13}$$

$$(3n-1)^2 = (n+1)(n+13)$$

$$9n^2 - 6n + 1 = n^2 + 14n + 13$$

$$8n^2 - 20n - 12 = 0 \quad | :4$$

$$2n^2 - 5n - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow n_1 = 3$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \text{ (не ур. Д.у.)}$$

Ответ: $n = 3$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2n^2-8n+14}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{4n^2-16n+28}$$

$$n+1 < 4n^2 - 16n + 28$$

$$4n^2 - 17n + 27 > 0 \text{ (параб., ветви вверх)}$$

$$4n^2 - 17n + 27 = 0$$

$$D = 289 - 432 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \emptyset \Rightarrow \text{н.м.}$$

~~вершины~~ ~~нижняя точка~~
~~параболы~~

$$n_0 = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$y_0 = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow \text{парабола выше}$$

$$\text{точки } 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - \text{любое}$$

Ответ: $n - \text{любое}$.



ШИФР 5100

	x	y
медь	2	3
свинец	4	5

56

Пусть x (шт.) - шт. А

Пусть y (шт.) - шт. В

$$x \cdot 2 + 3y = \text{все медь}$$

$$4x + 5y = \text{все свинец}$$

$$\text{Итого: медь} = 146; \text{свинец} = 258$$

Состав. сист. урав.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 146 \\ 4x + 5y = 258 \end{cases} \quad \begin{aligned} 1 \cdot 2 \quad 2x + 3 \cdot 36 &= 146 \\ 2x + 108 &= 146 \\ 2x &= 38 \\ x &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4x + 6y = 292 \\ 4x + 5y = 258 \end{cases} \quad x = 18 \\ &- \quad \underline{4x + 5y = 258} \\ &\quad y = 36 \end{aligned}$$

Ответ: медь А = 18; медь В = 36

57

$$\begin{cases} S_n = 36 = \frac{a_n + a_1}{2} \cdot n \\ a_1 = 4 \\ a_n = 5 \end{cases} \quad n - \text{кол-во членов арифм. прогрессии}$$

$$36 = \frac{5+4}{2} \cdot n$$

$$n = 36 : 9 \cdot 2$$

$$n = 8$$

Ответ: кол-во членов арифм. прогрессии = 8

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ x + y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right) + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right) + \cos y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cos\left(y - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(y - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} : \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$y - \frac{\pi}{12} = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right)$$

$$y = \pm \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + \frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_1 = \frac{7\pi}{12} - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_2 = \frac{5\pi}{12} + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\begin{cases} y_1 = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + \frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha_1 = \frac{7\pi}{12} - \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y_2 = -\arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + \frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{12} + \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4 \cos(\frac{\pi}{12})}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

58

 1)] стороны квадрата = a

 тогда его $S = a^2$,

 диагональ = $\sqrt{2}a$ (по теор. Пифагора)

 2) Диагональ квадрата это
расстояние между двумя противоположными
сторонами ромба $\Rightarrow$ ст. ромба = $2\sqrt{2}a$ (т.к. в прямо-
угольном треуголь. с $\angle = 30^\circ$ катет = $\frac{1}{2}$ гипотенузы)

$$3) \begin{cases} S_{\text{ромба}} = AC \cdot BD \cdot \frac{1}{2} \\ AC = 2 \sin 15^\circ \cdot 2\sqrt{2}a \\ BD = 2 \cos 15^\circ \cdot 2\sqrt{2}a \end{cases}$$

$$S_{\text{ромба}} = 2^4 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ a^2$$

$$4) \frac{S_{\text{ромба}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{2^4 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot a^2}{a^2} = 2^4 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

$$\text{Ответ: } 16 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{S_{\text{ромба}}}{S_{\text{квадрата}}}$$

510

$$\sqrt[3]{40 + \sqrt{1573}} + \sqrt[3]{40 - \sqrt{1573}} = \sqrt[3]{40 + 11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40 - 11\sqrt{13}} \approx$$

$$\approx \sqrt[3]{79,6} + \sqrt[3]{0,4} \approx 4,27$$

