

ШИФР

4 5 9 7 2

Класс 11 Вариант 12 Дата Олимпиады 09.02.19г.

Площадка написания МГТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	0	5	0	20	20	0					45	сорок пять	

N1 $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$ / $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0$

Т.к. корни многочлена могут являться только делителями свободного члена f (всего известной факт), то для данного многочлена нужно проверить делители числа 9. А именно $\pm 1; \pm 3; \pm 9$ (т.к. $a=1, f=9 \Rightarrow \frac{f}{a}=9$)

Пусть $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9$.

Если x - корень уравнения, то $P(x) = 0$

Пусть $x=1$, то $P(1) = 1 - 6 + 11 - 4 + 9 = 11 \neq 0 \Rightarrow x=1$ не является корнем $P(x)$

$x=-1$, $P(-1) = 1 + 6 + 11 + 4 + 9 = 31 \neq 0 \Rightarrow x=-1$ не является корнем $P(x)$

$x=3$, $P(3) = 81 - 162 + 99 - 12 + 9 = 15 \neq 0 \Rightarrow x=3$ не является корнем $P(x)$

$x=-3$, $P(-3) = 81 + 162 + 99 + 12 + 9 = 363 \neq 0 \Rightarrow x=-3$ не является корнем $P(x)$

$x=9$, $P(9) = 1761 - 4374 + 891 - 36 + 9 = -897 \neq 0 \Rightarrow x=9$ не является корнем $P(x)$

$x=-9$, $P(-9) = 1761 + 4374 + 891 + 36 + 9 = 7887 \neq 0 \Rightarrow x=-9$ не является корнем $P(x)$.

Т.к. возможные корни $P(x)$ ($\pm 1; \pm 3; \pm 9$) не подошли $\Rightarrow P(x)$ не имеет корней

ч.т.д.

А если корни не явл.
целыми?

ШИФР

4 5 9 7 2

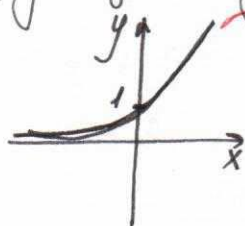
№2

$$(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^x + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^x \leq 14$$

Нужно заметить, что при $x=2$ выражение
 $(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^2 = 7-4\sqrt{3} + 7+4\sqrt{3} = 14$

Пусть $g(x) = (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^x$ и $f(x) = (\sqrt{7+4\sqrt{3}})^x$.

Функции $g(x)$ и $f(x)$ монотонно возрастают на $x \in \mathbb{R}$.



Если $x \leq 0$, то $g(x) \leq 1$ и $f(x) \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) + f(x) \leq 2$, но $2 < 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in (-\infty; 0]$ $g(x) + f(x) < 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 0]$ удовлетворяет условию.

Если $x > 0$, то функции $f(x) > 1$ и $g(x) > 1$.

Но $f(x) + g(x) \leq 14$ и при $x=2$ $g(2) + f(2) = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x \in (0; 2]$ условие выполняется $\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 2]$ является решением данного неравенства

Ответ: $[-2; 2]$?

№3 $y = \cos^2 x$

$$y^{2019} = (\cos^2 x)^{2019}$$

$$y^{2019} = (\cos x)^{4038}$$

$$(y^{2019})' = ((\cos x)^{4038})' = -4038 (\sin x)^{4037}$$

Ответ: $-4038 \sin^{4037} x$

N4

Пусть бойцов-плотников x , тогда бойцов-бетонщиков $x/3$,
 бойцов-каменщиков nx (где $3 \leq n \leq 20$), бойцов, выполняющих
 другие профессии $x+3=y$. По условию 36 бойцов всего.

Тогда $36 = x + \frac{x}{3} + nx - y$

$$x + \frac{x}{3} + nx - x - 3 = 36$$

$$\frac{x}{3} + nx = 39$$

$$x + 3nx = 117$$

$$x = \frac{117}{1+3n}, \text{ } x - \text{целое число человек} \Rightarrow$$

Найдем делители числа $117 = 39 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 13$, тогда

$$1+3n=39$$

$$3n=38$$

$$n = \frac{38}{3}$$

$$1+3n=26; n = \frac{25}{3}$$

$$1+3n=3$$

$$3n=2$$

$$n = \frac{2}{3}$$

$$1+3n=117$$

$$n = \frac{116}{3}$$

$$1+3n=9$$

$$3n=8$$

$$n = \frac{8}{3}$$

$$1+3n=13$$

$$3n=12$$

$$n=4$$

т.к. n - целое по условию, то $n=4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{117}{1+3 \cdot 4} = \frac{117}{13} = 9 \text{ плотников, тогда}$$

$$y = x + 3 = 9 + 3 = 12 - \text{выполняющих другие профессии}$$

тогда выполняющих одной профессией будет $z = 36 - y =$

$$= 36 - 12 = 24$$

Ответ: 24 человека. (20) ✓

Найти: Р, ВК, КЕ, БН

Р-шина ограждения

Решение:

- Решение:
- 1) Т.к. $ВН \geq 20$ м и длина ограждения должна быть минимальной $\Rightarrow ВН = 20$ м
 - 2) $ВН = FQ$, $МА = QK$, $FB = KL$, $НМ = LA$,
пусть $EF = x \Rightarrow DN = CO = EF = x$; пусть $DC = y \Rightarrow AB = DC = y$
(т.к. $ДСAB$ и $EFDC$ — прямоугольники)
 - 3) $ED = FB + BN \Rightarrow ED = x + 20 = 45$
 - 4) $OB = NM + MA = BN + MA = 40$
 - 5) $CE = ED + y = 45 + y$, $CB = x + OB = x + 40$
 - 6) $P = CE + EF + FB + BN + NM + MA + AB + BC$, но учитывая пункты 2, 3, 4, 5 получаем: $P = 2 \cdot (CB + CE) = 2(x + 40 + 45 + y) = 2(x + y + 85)$
 - 7) $S = S_{EFND} + S_{BNMN} + S_{ДСAB} = ED \cdot EF + BN \cdot NM + DC \cdot CB =$
 $= x \cdot 45 + 300 + (x + 40)y = 2100$
 $45x + (x + 40)y = 1800$; $y = \frac{1800 - 45x}{x + 40}$
 - 8) $P = 2(x + y + 85) = 2\left(\frac{1800 - 45x}{x + 40} + x + 85\right)$
Для того, чтобы значение P было минимальным, нужно, чтобы x был тоже минимальным.
 $P = \frac{2 \cdot (1800 - 45x)}{x + 40} + 2x + 190$
Найдем минимальное x :
 $P' = \left(\frac{2 \cdot (1800 - 45x)}{x + 40} + 2x + 190\right)' = 2 + \left(\frac{2 \cdot (1800 - 45x)}{x + 40}\right)' =$
 $= 2 + \frac{2(1800 - 45x)'(x + 40) - (2 \cdot (1800 - 45x))(x + 40)'}{(x + 40)^2} =$

ШИФР

4 5 9 7 2

№5 продолжение

$$P' = 2 + \frac{2 \cdot (-45)(x+40) - (3600 - 90x)}{(x+40)^2} =$$

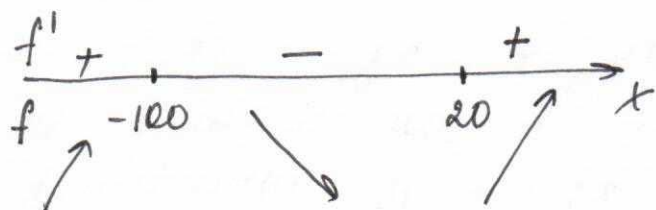
$$= 2 + \frac{-90x - 3600 + 90x - 3600}{(x+40)^2} = 2 - \frac{2 \cdot 3600}{(x+40)^2} = 0$$

$$2 = \frac{2 \cdot 3600}{(x+40)^2} \quad x \neq -40$$

$$(x+40)^2 = 3600$$

$$(x+40-60)(x+40+60) = 0$$

$$x = 20 \quad x = -100$$



при $x = 20$ достигается
минимум функции $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при $x = 20$ P будет
наименьшим

$$9) P = 2 \left(\frac{1800 - 45 \cdot x}{x+40} + x + 85 \right)$$

$$x = 20 \Rightarrow P = 2 \left(\frac{1800 - 45 \cdot 20}{20+40} + 20 + 85 \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{900}{60} + 105 \right) = 2(15 + 105) = 2 \cdot 120 = 240 \text{ (м)}$$

$$10) BK = AK + y; \quad y = \frac{1800 - 45 \cdot x}{x+40}, \quad x = 20 \quad y = \frac{900}{60} = 15 \text{ м}$$

$$BK = 45 + 15 = 60 \text{ м}$$

$$11) KE = FK + x = OB + x = 40 + 20 = 60 \text{ м}$$

Ответ: $P = 240 \text{ м}$

$$BH = 20 \text{ м}$$

$$BK = 60 \text{ м}$$

$$KE = 60 \text{ м}$$

(20)

ШИФР

4 5 9 7 2

$$N6 \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 9 \\ x^2 + xz + z^2 = 16 \\ y^2 + yz + z^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 - y^2 + x(z-y) = 7 \\ y^2 - x^2 + z(y-x) = 48 \\ z^2 - x^2 + y(z-x) = 55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (z-y)(z+y+x) = 7 \\ (y-x)(y+x+z) = 48 \\ (z-x)(z+x+y) = 55 \end{cases}$$

~~$z+y+x = y+x+z = z+x+y$~~
 Т.к. числа x, y, z положительные
 $\Rightarrow x+y+z > 0 \Rightarrow z \neq y \neq x$

Числа 7; 48; 55 не имеют общих делителей
и $z+y+x = y+x+z = z+x+y$. Т.к. число 7 простое $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ либо $z+y+x=7$, либо $z-y=7$, но 48 и 55
 не делятся на 7 $\Rightarrow z-y=7$ и $z+y+x=1$
 Аналогично, $y-x=48$ и $z-x=55$

$$\begin{cases} z+y+x=1 \\ z-y=7 \\ y-x=48 \\ z-x=55 \end{cases}$$

$$z = 7 + y$$

$$x = y - 48$$

$$z + y + y - 48 = 1$$

$$3y = 49 - 7$$

$$3y = 42$$

$$y = 14$$

, тогда $z = 7 + 14 = 21$ и

$$x = 14 - 48 = -34$$

Ответ: $x = -34$

$$y = 14$$

$$z = 21$$

?