ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14271

Класс 11 Б Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания Горный университет

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	0	75	семьдесят пять	

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14271

2. $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}=4$

ОДЗ: $\begin{cases}3x-3\geq 0\\ x-3\geq 0,\end{cases}$ $\begin{cases}3x\geq 3\\ x\geq 3,\end{cases}$ $x\geq 3.$

$\sqrt{3x-3}=4+\sqrt{x-3}$

$3x-3=(4+\sqrt{x-3})^2,$ $3x-3=16+8\sqrt{x-3}+x-3$

$3x-3-13-x=8\sqrt{x-3}$

$2x-16=8\sqrt{x-3},$ $x-8=4\sqrt{x-3}$

$\begin{cases}x-8\geq 0\\ x^2-16x+64=16(x-3),\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 8\\ x^2-16x+64-16x+48=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 8\\ x^2-32x+112=0\end{cases}$

$x_{1,2}=16\pm\sqrt{256-112}$

$x_{1,2}=16\pm 12,$ $x_1=28-\cancel{70}$

$x_2=4,$ $\begin{cases}x\geq 8\\ \left[\begin{array}{l}x=28\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}$ $x=28$ - удв ОДЗ.

Ответ: 28.

3. $\frac{-x^3+2x^2+x-1}{2-x}<x^2,$ $\frac{-x^3+2x^2+x-1-x^2(2-x)}{2-x}<0.$

$\frac{-x^3+2x^2+x-1-2x^2+x^3}{2-x}<0,$ $\frac{x-1}{2-x}<0,$ 1 $+$ 2 x

$x>2,$ $x<1$

Ответ: $(-\infty;\cancel{1}2)\cup(2;+\infty)$

5. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14},$ т.к. $0<\frac{1}{3}<\cancel{0}1$ то

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 14271

$2(x+1) < 2x^2 - 8x + 14$, $\qquad \cancel{2}x + 1 < x^2 - 4x + 7$,

$x^2 - 5x + 6 > 0$, $\qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-36}}{2}$, $\qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

$(x-3)(x-2) > 0$,

$x < 2$, $x > 3$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

7. $S = 36$, $a_1 = 4$, $a_n = 5$, $n - ?$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $\qquad 2S = (a_1 + a_n) \cdot n$, $\qquad n = \frac{2S}{a_1 + a_n} = \frac{2 \cdot 36}{9} = 8$.

Ответ: 8.

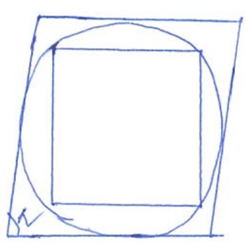
6. пусть деталей типа A пр-но x шт, где $x > 0$, тогда деталей типа B пр-но y шт, где $y > 0$.

$\begin{cases} 2x + 3y = 146 \\ 4x + 5y = 258 \end{cases}$, $\qquad \begin{cases} 4x + 6y = 292 \\ 4x + 5y = 258 \end{cases}$, $\qquad \begin{cases} 4x + 6y - 4x - 5y = 292 - 258 \\ y = 34 \end{cases}$,

$\begin{cases} 2x + 3y = 146 \\ y = 34 \end{cases}$, $\qquad \begin{cases} 2x = 146 - 3y \\ y = 34 \end{cases}$, $\qquad \begin{cases} x = \frac{146 - 3 \cdot 34}{2} \\ y = 34 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = 44 \\ y = 34 \end{cases}$

Ответ: деталей типа A – 44 шт, деталей типа B – 34 шт.

8.



$\alpha = 30°$; пусть a – сторона ромба, где $a > 0$, b – сторона кв-та, где $b > 0$.

$S_p = p_r \cdot r = 2a \cdot r$, $\qquad \cancel{a = \frac{S_p}{2r}}$

$S_p = a^2 \cdot \sin\alpha$, $\qquad 2ar = a^2 \sin\alpha$, $\qquad 2r = a \sin\alpha$

$a = \frac{2r}{\sin\alpha}$

$S_к = b^2$, $2r = b\sqrt{2}$, $b = r\sqrt{2}$.

$$\frac{S_p}{S_к} = \frac{a^2 \sin\alpha}{b^2} = \frac{\frac{4r^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha}{r^2\cdot 2} = \frac{4r^2}{\sin\alpha\cdot r^2\cdot 2} = \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: $\frac{S_p}{S_к} = 4$.

4. $\lg(3x-1) - \frac{1}{2}\lg(x+1) = \frac{1}{2}\lg(x+13)$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-1>0 \\ x+1>0 \\ x+13>0 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x>1 \\ x>-1 \\ x>-13 \end{cases}$, $x>\frac{1}{3}$

$\lg(3x-1) - \frac{1}{2}(\lg(x+1)+\lg(x+13)) = 0.$

$\lg(3x-1) - \frac{1}{2}\lg(x+1)(x+13) = 0.$

$\lg(3x-1) - \lg\sqrt{(x+1)(x+13)} = 0.$

$\lg\frac{3x-1}{\sqrt{(x+1)(x+13)}} = 0$, $\frac{3x-1}{\sqrt{(x+1)(x+13)}} = 10^0$, $\frac{3x-1}{\sqrt{(x+1)(x+13)}} = 1.$

$(x+1)(x+13)>0$, $+$ -13 $-$ -1 $+$ x, $x<-13$, $x>-1$. (на ОДЗ: $x>\frac{1}{3}$).

$3x-1-\sqrt{(x+1)(x+13)} = 0$, $3x-1 = \sqrt{(x+1)(x+13)}$

$\begin{cases} 3x-1>0 \\ 9x^2-6x+1 = (x+1)(x+13) \end{cases}$, $\begin{cases} 3x>1 \\ 9x^2-6x+1 = x^2+14x+13 \end{cases}$

$8x^2-20x-12=0$, $2x^2-5x-3=0$, $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}$

$x_{1,2} = \frac{5\pm7}{4}$

$x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ – не удов ОДЗ.

Ответ: 3.

9. $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x+y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} - y \end{cases}$,

$2\sin\frac{\frac{2\pi}{3}-y+y}{2}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-y-y}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\frac{2\pi}{3}-2y}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{2(\frac{\pi}{3}-y)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$2\sin\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}-y) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\pi}{3}-y) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{3}-y) = 1+\sqrt{3}$.

$\cos(\frac{\pi}{3}-y) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$, $\cos(\frac{\pi}{3}-y) = \frac{\sqrt{3}+3}{6}$.

$\frac{\pi}{3} - y = \pm\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\left[\begin{array}{l} \cancel{\pi} - y = \pm\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + 2\pi n - \frac{\pi}{3} \\ -y = \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + 2\pi m - \frac{\pi}{3} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} y = \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi n \\ y = -\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi m \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} - y \\ y = \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} - y \\ y = -\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi m \end{cases} \end{array}\right.$, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ y = \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}. \\ \begin{cases} x = \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} + 2\pi m \\ y = -\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi m \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $(-\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
$(\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ -\arccos(\frac{\sqrt{3}+3}{6}) + \frac{\pi}{3} - 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

1. $(x^2-2x+2)(x^2-2x-2) = 5$.

пусть $x^2-2x+2 = t$, тогда $x^2-2x-2 = x^2-2x+2-4 = t-4$.

$t(t-4) = 5$ $\qquad$ $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5}$, $\quad t_{1,2} = 2 \pm 3$

$t^2 - 4t - 5 = 0$, $\qquad$ $t_1 = 5$, $\quad t_2 = -1$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11271

1) $x^2-2x+2=5$, $x^2-2x-3=0$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+3}$, $x_{1,2}=1\pm2$, $x_1=-1$, $x_2=3$

2) $x^2-2x+2=-1$, $x^2-2x+3=0$.

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-3}$ $D<0$, $\emptyset$.

Ответ: $-1; 3$.