ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

Класс 10 А **Вариант** 1 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МОУ СОШ №1 с УИОП г. Нарьян

7 8 9 10
10 10 10 0

Задача	1	2	3	4	5	6	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	8	68	шестьдесят восемь	[illegible]

№1

$$(x+1)(x+2)(x+3)=x(x^2-4)$$
$$(x^2+2x+x+2)(x+3)=x^3-4x$$
$$(x^2+3x+2)(x+3)=x^3-4x$$
$$\cancel{x^3}+3x^2+2x+3x^2+9x+6=\cancel{x^3}-4x$$
$$6x^2+15x+6=0$$
$$6x^2+12x+3x+6=0$$
$$6x(x+2)+3(x+2)=0$$
$$(x+2)(6x+3)=0$$
$$x+2=0 \qquad 6x+3=0$$
$$x=-2 \qquad x=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $x_1=-2$ $x_2=-\frac{1}{2}$

+

№2

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}=2$$

ОДЗ $x\geq 0$, т.к $\sqrt{2x}\geq 0$
$$2x\geq 0$$
$$x\geq 0$$

$$(\sqrt{x+4}-\sqrt{2x})^2=4$$
$$x+\cancel{4}+2x-2\sqrt{(x+4)\cdot 2\cdot x}=\cancel{4}$$
$$3x=2\sqrt{(2x+8)\cdot x}$$

⟸ ~~отсюда~~ сразу видно, что один из корней будет 0, найдем второй корень уравнения (~~из~~ 2 корня из-за того, что мы возвели уравнение в квадрат ~~[illegible]~~

$$3=\frac{2\cdot\sqrt{2x^2+8x}}{x}$$
$$3=2\cdot\sqrt{2+\frac{8}{x}}$$

№2

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

$\sqrt{2+\frac{8}{x}}=1,5$

$2+\frac{8}{x}=2,25$

$\frac{8}{x}=0,25$

$x=\cancel{36}\,32$

След $x_1=0$ $x_2=\cancel{36}\ 32$. Подставляя в изначальное уравнение имеем

$\sqrt{0+4}-\sqrt{2\cdot 0}=2$

$2=2$

$\sqrt{32+4}-\sqrt{32\cdot 2}=2$

$-2\neq 2$

Значит $x_2=32$ не подходит

Ответ: единственный корень уравнения $x=0$

№3

$\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-3}>1$ ОДЗ $x\neq 2$, $x\neq 3$

$\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-3}-1>0$

$\frac{x^2-3x-2x+4-(x^2-5x+6)}{(x-2)(x-3)}>0$

$\frac{\cancel{x^2}-\cancel{5x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{5x}-6}{(x-2)(x-3)}>0$

$\frac{-2}{(x-2)(x-3)}>0 \ |:-2$

$\frac{1}{(x-2)(x-3)}<0$

Ответ: $x\in(2;3)$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

№4

$\log_2(x-3)+\log_2(3+x)=4$

ОДЗ $\log_2$ $x-3\geqslant 0$

$x-3\geqslant 0$

$x\geqslant 3$

$\log_2(x-3)(3+x)=\log_2 16$

$x^2-9=16$

$x^2=25$

$x=\sqrt{25}$

$\cancel{x=-5}$ $x=5$

Ответ: $x=5$

№5

$5^x-5^{3-x}>20$

$5^x-\frac{5^3}{5^x}>20 \mid \cdot 5^x$, $5^x\geqslant 0$ всегда

$(5^x)^2-5^3-20\cdot 5^x>0$

$D=400+500=900=30^2$

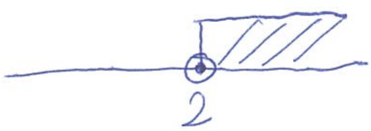
$5^x=\frac{20+30}{2}=25$

$5^x\neq\frac{20-30}{2}\cancel{=}-5$ – этого не может быть т.к $5^x\geqslant 0$ всегда след

$5^x=25$

$5^x=5^2$

$x=2$



Ответ $x\in(2;+\infty)$

w 4

ГАЗПРОМ
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

(W6) По условию задачи составим ~~сист~~ систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} N_5 = N_2 + 3 \ (1) \\ N_4 = N_3 + 1 \Longrightarrow N_3 = N_4 - 1 \ (3) \\ N_4 = 4N_2 \ (2) \\ N_5 + N_4 + N_3 + N_2 = 32 \ (4) \end{cases}$$

Подставим (1), (2) и (3) в (4)

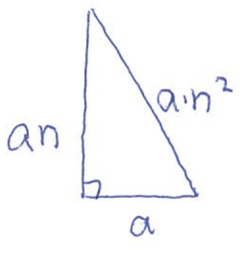
$$N_2 + 3 + 4N_2 + N_2 + 4N_2 - 1 = 32$$

$$10N_2 = 30$$

$N_2 = 3$, тогда $N_4 = 3\cdot 4 = 12$ $N_3 = 12 - 1 = 11$ $N_5 = 3 + 3 = 6$

Ответ: $N_5 = 6$ $N_4 = 12$ $N_3 = 11$ $N_2 = 3$

(W7)



геом. прогрессия = a; $n\cdot a$; $n\cdot n\cdot a$, тогда

По теореме Пифагора

$$a^2\cdot n^4 = a^2 + a^2\cdot n^2$$

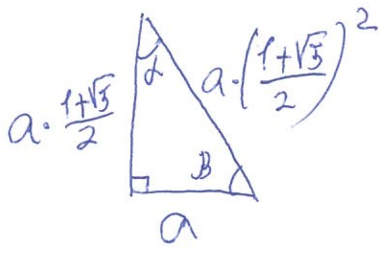
$$\cancel{a^2}\cdot n^4 = \cancel{a^2}(1+n^2)$$

$$n^4 - n^2 - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$n \neq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (т.к. n не может быть отрицательным)



Тогда $\sin\alpha = \dfrac{a}{a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}} = \dfrac{4}{(1+\sqrt{5})^2}$

$\sin\beta = \dfrac{a\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\cancel{a}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$

№5

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

~~Ответ: $\sin\alpha$ = ...~~

$\cos\alpha = \dfrac{a\frac{1+\sqrt5}{2}}{a\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{1+\sqrt5}$ $\cos\beta = \dfrac{a}{a\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{(1+\sqrt5)^2}$

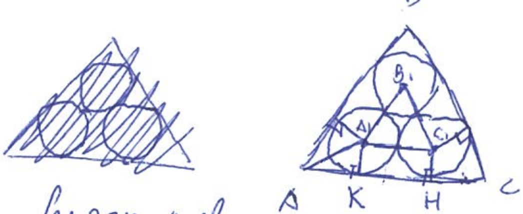
Т.к $\cos\alpha = \sin\beta$ и $\cos\beta = \sin\alpha$ след острые углы данного треугольника $30°$ и $60°$

Ответ: $30°$ и $60°$

№8

Дано
$d = 4$ ед

$r = \frac{d}{2} = 2$ ед



1) ~~Дано~~ Данный $\triangle ABC$ будет равносторонним. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\triangle A_1B_1C_1$ тоже равносторон т.к $a = d$).

2) $KH = d$ (т.к A_1C_1HK — прямоуг. KA_1 и C_1H $\perp$-ы AC по построению)

3) AK по Т. Пифагора равен $\sqrt{AA_1^2 - A_1K^2}$.

4) $A_1K = r = 2$ ед, т.к $A_1AK = 30°$ (окружность вписанная, а AA_1 — биссектр.) то $AA_1 = A_1K : \sin A_1AK = \dfrac{A_1K}{\sin A_1AK} = 4$ ед

5) След $AK = \sqrt{AA_1^2 - A_1K^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ $AK = HC$ (т.к равносторон $\triangle ABC$)

6) $AC = AK + KH + HC = 4 + 2\sqrt{12} = a$

7) $h_{\text{равносторон } \triangle\text{-а}} = a \cdot \cos 30° = \dfrac{(4+2\sqrt{12})\cdot\sqrt3}{2}$

8) $S_\triangle = \dfrac{a\cdot h}{2} = \dfrac{(4+2\sqrt{12})\cdot\sqrt3\,(4+2\sqrt{12})}{2\cdot 2} = \dfrac{(4+2\sqrt{12})^2\cdot\sqrt3}{4} = \dfrac{(4+4\sqrt3)^2\cdot\sqrt3}{4}$

$= \dfrac{16(1+\sqrt3)^2\cdot\sqrt3}{4} = 4(\sqrt3 + 3\sqrt3 + 6) = 24 + 16\sqrt3$ ед

Ответ: $S_\triangle = 24 + 16\sqrt3$ ед

+

+

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

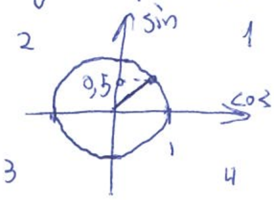
Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1108

№9

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x+y = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \end{cases}$$

Т.к. $\sin x + \sin y = 1$ и $x+y=60$, след эти углы ~~находятся~~ могут находится только в 1 четверти, иначе или $\sin x + \sin y$ не будут „+" или же сумма углов не подойдет.



След система имеет только одно решение $x=30^\circ$ и $y=30^\circ$

$\sin 30 + \sin 30 = 1$
$30+30=60^\circ$

Ответ: $x=30$ $y=30$

±

№10

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}} = \frac{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)\left(\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2 - \sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)} + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2 - \sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)} + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{6+\sqrt{\frac{847}{27}}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2 - \sqrt[3]{36-\frac{847}{27}} + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2} =$$

$$= \frac{12}{\left(\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2 - \frac{5}{3} + \left(\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}\right)^2}$$