ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 2 9 8 3

Класс 11 **Вариант** 11 **Дата Олимпиады** 03.02.2019

Площадка написания МГТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	10	15	20	9	0					59	пятьдесят девять баллов	[illegible]

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
(ab)c=a(bc) E=mc²

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 2 9 8 3

№2 $(4-\sqrt{15})^x + (4+\sqrt{15})^x \leq 62$

Заметим, что $(4-\sqrt{15})^{-x} = \frac{1}{(4-\sqrt{15})^x} = (4+\sqrt{15})^x$

$\frac{1}{(4+\sqrt{15})^x} + (4+\sqrt{15})^x \leq 62$ $\quad t = (4+\sqrt{15})^x$

$t > 0$

$\frac{1}{t} + t \leq 62$

$t^2 - 62t + 1 \leq 0$

$t_{1,2} = 31 \pm \sqrt{961-1} = 31 \pm \sqrt{960}$

$t_{1,2} = 31 \pm 8\sqrt{15}$

$(t-31-8\sqrt{15})\cdot(t-31+8\sqrt{15}) \leq 0$

$t \in [31-8\sqrt{15}; 31+8\sqrt{15}]$

$(4+\sqrt{15})^x \in [31-8\sqrt{15}; 31+8\sqrt{15}]$

$(4+\sqrt{15})^2 = 16+15+8\sqrt{15} = 31+8\sqrt{15}$

$(4+\sqrt{15})^{-2} = (4-\sqrt{15})^2 = 31-8\sqrt{15}$

тогда $x \in [-2; 2]$

10

Ответ: $x \in [-2; 2]$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 2 9 8 3

№3 $y=\sin^2 x$ 2019 производная $y^{(2019)}$ – производная 2019-ого порядка

$y^{(1)}=(\sin^2 x)'=(\sin x\cdot\sin x)'=\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x=2\sin x\cdot\cos x=\underline{\underline{\sin 2x}}$

Рассмотрим производные $\sin 2x$ и $\cos 2x$

$(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot 2=\cancel{\ldots}=2\cdot\cos 2x$

$(\cos 2x)'=-2\sin 2x=-2\sin 2x$

$y^{(2)}=(\sin 2x)'=2\cdot\cos 2x$

$y^{(3)}=2\cdot(\cos 2x)'=-4\cdot\sin 2x$

$y^{(4)}=-4\cdot(\sin 2x)'=-8\cdot\cos 2x$

$y^{(5)}=-8\cdot(\cos 2x)'=16\cdot\sin 2x$

$y^{(6)}=32\cos 2x$

$y^{(7)}=-64\sin 2x$

$y^{(8)}=-128\cdot\cos 2x$

...

Тогда заметим, что при взятии ~~...~~ производной $y^{(n)}$ вылезает умножение на 2, где $y^{(n)}=k\cdot\sin 2x$ или $k\cdot\cos 2x$ ✓

Знак чередуется с T (периодом) = 2 (При взятии производной от косинуса вылезает минус, а ~~...~~ от синуса – знак не меняется)

Тогда $y^{(2n)}=2^{(2n-1)}\cdot\cos 2x\cdot(-1)$

производная y $2n$-ого порядка

домножаем если $n\%4=3$ или 0

остаток от деления

$y^{(2n+1)}=2^{2n}\cdot\sin 2x\cdot(-1)$

15

Тогда $y^{2019}=2^{2019-1}\cdot\sin 2x\cdot(-1)=-2^{2018}\cdot\sin 2x$

$2019\%4=3$

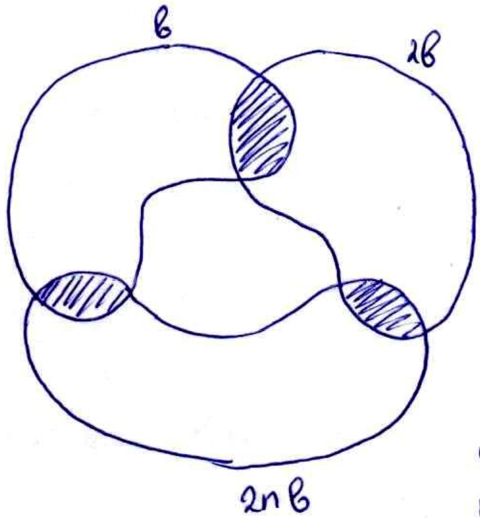
Ответ: $-2^{2018}\cdot\sin 2x$

№4

Обозначим за $в$ - кол-во бетонщиков

тогда плотников будет $2в$,

а каменщиков $2nв$.



Изобразим множества бетонщиков, каменщиков и плотников.

Человек не может владеть тремя профессиями сразу.

Обозначим суммарное кол-во пересечений (людей с $2^{-я}$ профессиями) за x.

Тогда $32 = в + 2в + 2nв - x$ (1)

По условию дано, что $x = 2в + 2$

(1) $32 = в + 2в + 2nв - 2в - 2$

$32 = в + 2nв - 2$

$34 = в(2n+1)$ $\quad 2n+1 \in Z$, $в \in Z$

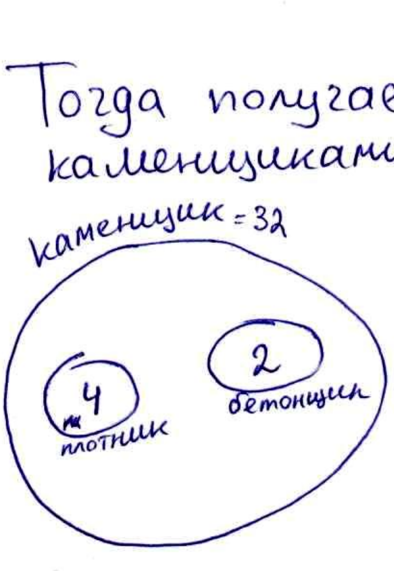
$34 = 17 \cdot 2$ ← простые делители числа 34

~~Тогда~~ $2n+1 \geq 7$ $(n \in [3;20])$

Тогда $\boxed{в = 2}$ = бетонщик $\quad \boxed{2в = 4}$ = плотник $\quad \boxed{2nв = 32}$ = каменщик

$2n+1 = 17$ $\quad \boxed{n = 8}$ $\quad x = 6$

Тогда получается, что все бойцы являются каменщиками. Тогда людей, которые владеют лишь одной профессией



$32 - 4 - 2 = \underline{\underline{26}}$

20

Ответ: 26

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 2 9 8 3

№1 $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$

$(x-1)^4=(x-1)^2(x-1)^2=(x^2-2x+1)(x^2-2x+1)=x^4-2x^3+x^2-2x^3+4x^2-2x+x^2-2x+1=$

$=x^4-4x^3+6x^2-2x+1=(x-1)^4>0$

$6x^2-22x+22=0$ $\frac{D}{4}=11^2-22\cdot6<0$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 6 \\ \hline 132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $6x^2-22x+22>0$

Парабола ветвями вверх не имеющая пересечений с осью OX.

Тогда $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=\underset{\geq 0}{(x-1)^4}+\underset{>0}{(6x^2-22x+22)}+1>0$

Т.к. $(x-1)^4+1>0$ при любом x

$6x^2-22x+22>0$ при любом x

Тогда $x^4-4x^3+12x^2-24x+24>0$ при любом x

$\Rightarrow$ не имеет пересечения с осью Ox и не может быть равен 0.

5

№6
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 & (1) \\ x^2+xz+z^2=9 & (2) \\ y^2+yz+z^2=36 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y)^2=4+xy \\ (x+z)^2=9+x\cancel{y}z \\ (y+z)^2=36+yz \end{cases}$$

$(2)-(1) = (z-y)(z+y)+x(z-y)=5$

$(z-y)(x+y+\cancel{z}z)=5$

$(3)-(2)$ $(y-x)(y+x)+z(y-x)=27$

$(y-x)(x+y+z)=27$

$$\begin{cases} (z-y)(x+y+z)=5 \\ (y-x)(x+y+z)=27 \\ x^2+xy+y^2=4 \\ (z-x)(x+y+z)=32 \end{cases}$$

$(3)-(1) = (z-x)(x+y+z)=32$

$\dfrac{z-x}{z-y}=\dfrac{32}{5}$ $\qquad$ $\dfrac{z-y}{y-x}=\dfrac{5}{27}$

$5z-5x=32z-32y$ $\qquad$ $27z-27y=5y-5x$

$32y=27z+5x$ $\qquad$ $\boxed{32y=27z+5x}$ $\qquad$ $x=\dfrac{32y-27z}{5}$

$(1)+(2)+(3)$ $(x+y)^2+(x+z)^2+(z+y)^2=49+xy+yz+xz$

$$\begin{cases} \cancel{x^2}\left(\dfrac{32y-27z}{5}\right)^2+y\left(\dfrac{32y-27z}{5}\right)+y^2=4 \\ \left(\dfrac{32y-27z}{5}\right)^2+z\left(\dfrac{32y-27z}{5}\right)+z^2=9 \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32^2y^2+27^2z^2-27\cdot32\cdot2yz+5\cdot32y^2-5\cdot27yz=100-25y^2 \\ \\ \end{cases}$$

$1209y^2-8775yz+\cancel{2}729z^2=100$

$$\begin{cases} y^2+yz+z^2=36 \\ 1209y^2-8775yz+729z^2=100 \end{cases}$$

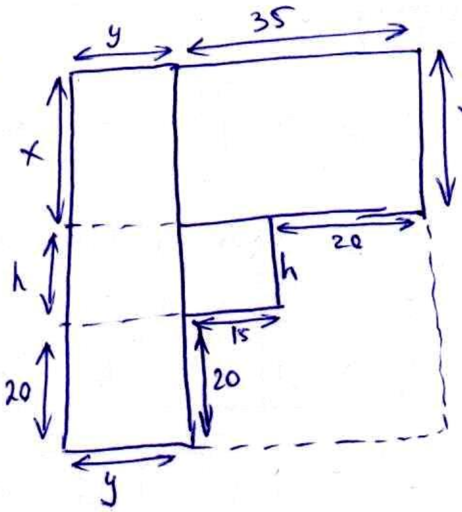
0

ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3 2 9 8 3

№5



$S = 1600$

$x(y+35) + 20\cdot y + h(15+y) = 1600$

$h = \dfrac{1600 - 20y - 35x - xy}{15+y} \geq 10$

$1600 - 20y - 35x - xy \geq 150 + 10y$

$1450 - 30y - 35x - xy \geq 0$

$P = 2(20+h+x) + 2y + 35 + 35 \longrightarrow \min$

$P = 110 + 2h + 2x + 2y \longrightarrow \min$

$\begin{cases} h+x+y \to \min \\ h \geq 10 \\ xy + hy + 35x + 20y + 15h = 1600 \end{cases}$ +

Заметим, что площадь равна данной и периметр наименьший при $h=15$ и $x=y$ ($xy \to \max$ при $x=y$) Участок имеет ось симметрии

верно!

9

$x^2 + 15\cdot 15 + 35\cdot x + 35x = 1600$

$x^2 + 70x - 1375 = 0$

$x_{1,2} = -35 \pm \sqrt{1225+1375} = -35 \pm 10\sqrt{26}$

$x = 10\sqrt{26} - 35$

$P_{min} = 4x + 30 + 30 + 80 = 140 + 40\sqrt{26} - 140 = \underline{\underline{40\sqrt{26}}}$

$BK = 10\sqrt{26} = KE \quad GH = 15$

Ответ: $P_{min} = 40\sqrt{26} \quad BK = KE = 10\sqrt{26} \quad GH = 15$