ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11538

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11 ФЕВРАЛЯ 20

Площадка написания МГТУ им. Н. Э. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	8	10	10	15	—	20	83	восемьдесят три	

5 80 восемьдесят

№1.

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9) \Rightarrow (x-1)(x-3)(x-5)=x(x-3)(x+3)$

При условии, что $x=3$ (корень уравнения):

$(x-1)(x-5)=x(x+3) \Rightarrow x^2-5x-x+5=x^2+3x$.

$-9x=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{9}$.

Ответ: $x=3$; $x=\frac{5}{9}$.

№2.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$; ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow x\geq 1$.

$\sqrt{3x+1}=2-\sqrt{x-1}$; возведем обе части ур-я в квадрат:

$3x+1=4-4\sqrt{x-1}+x-1 \Rightarrow 2x-2=-4\sqrt{x-1} \,\Big|:(-2)$

$1-x=2\sqrt{x-1}$; возведем обе части ур-я в квадрат:

$1-2x+x^2=4x-4 \Rightarrow x^2-6x+5=0$.

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-5}}{1}=3\pm 2$; $x_1=3-2=1$; $x_2=5$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11538

продолжение №2:

Т.к. в процессе решения ур-я оно возводилось в квадрат, сделаем проверку:

Т.к. оба корня удовлетворяют ОДЗ, проверим оба

$\sqrt{1-1}+\sqrt{3+1}=2 \Rightarrow 0+2=2 \Rightarrow 2=2$, $x=1$ – корень

$\sqrt{5-1}+\sqrt{15+1}=2 \Rightarrow 2+4=2 \Rightarrow 6\neq 2$, $x=5$ – не являетс решением ур

Ответ: $x=1$.

№3.

$\frac{2}{x+1} \geqslant \frac{3}{x+2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -2 \end{cases}$

$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)}\geqslant$

$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\leq 0$

Решим неравенство методом интервалов:

$-\quad +\quad -\quad +$; $-2 \quad -1 \quad 1$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;1]$.

№4.

$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$; ОДЗ: $x>0$.

$\log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=\frac{11}{12} \Rightarrow \log_3(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}})=\frac{11}{12}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11538

продолжение №4:

$x^{\frac{11}{6}} = 3^{\frac{11}{12}} \Rightarrow x^{\frac{11}{6}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{11}{6}} \Rightarrow x = \sqrt{3}$.

Ответ: $x = \sqrt{3}$.

№5.

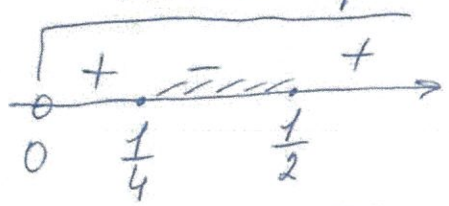
$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x \Rightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$;

Пусть $2^x = t$, $t > 0$, тогда:

$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$; $8t^2 - 6t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{8} = \frac{3 \pm 1}{8}$;

$t_1 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Решим неравенство методом интервалов:



Ответ: $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$.

№6.

Пусть: x – кол-во сибирских;

y – кол-во ангорских;

z – кол-во персидских;

t – кол-во сиамских.

Сопоставив с условием задачи, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 77 \\ t = 2y \\ z = 1{,}5t \\ x = z - 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z = 3y; \\ x = 3y - 13; \\ t = 2y. \end{matrix}$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11538

продолжение №6:

$3y-13+y+3y+2y=77 \Rightarrow 9y=90 \Rightarrow y=10$;

$t=2y$ и $t=2\cdot 10=20$; $z=1,5t$ и $z=1,5\cdot 20=30$;

$x=z-13$ и $x=30-13=17$;

Ответ: сибирских - 17;
ангорских - 10;
персидских - 30;
сиамских - 20.

№7.

$a_1=\lg 2$; $a_2=\lg(2^x-1)$; $a_3=\lg(2^x+1)$.

Чтобы эти три члена образовывали арифметическую прогрессию, должно выполняться условие:

$a_2-a_1=a_3-a_2$; тогда получаем, что:

$\lg(2^x-1)-\lg 2=\lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)$;

~~$\lg(2\cdot 2^x-2)=\lg$~~ $\lg\left(\frac{2^x-1}{2}\right)=\lg\left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right)$;

$\frac{2^x-1}{2}=\frac{2^x+1}{2^x-1}$; Пусть $2^x=t$, $t>0$, тогда:

$\frac{t-1}{2}=\frac{t+1}{t-1} \Rightarrow 2t+2=t^2-2t+1 \Rightarrow t^2-4t-1=0$;

$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+1}}{1}=2\pm\sqrt5$; $t=2-\sqrt5$ - не удовлетворяет условию $t>0$.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11538

продолжение №7:

т.к. $2^x = t$, то $2^x = 2+\sqrt{5} \Rightarrow x = \log_2(2+\sqrt{5})$

Ответ: $x = \log_2(2+\sqrt{5})$. ✓

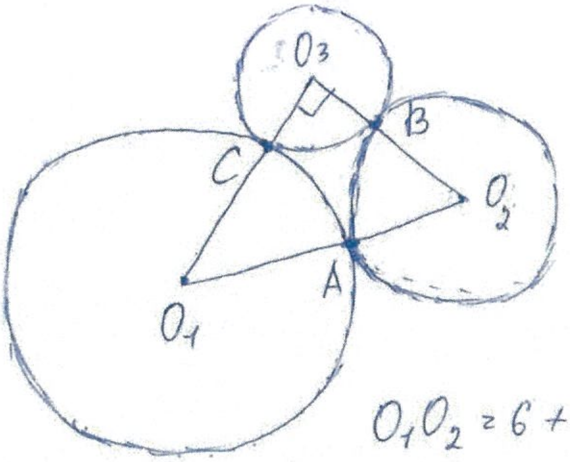
№8.

Дано: $O_1C = O_1A = 6$ см;

$O_2A = O_2B = 4$ см;

$\angle O_1O_3O_2 = 90°$.

Найти: $O_3C = O_3B = ?$



Решение:

$O_1O_2 = 6+4 = 10$; $O_2O_3 = 4+x$; $O_1O_3 = 6+x$

По теореме Пифагора:

$(4+x)^2 + (6+x)^2 = 10^2 \Rightarrow 2x^2 + 20x - 48 = 0 \,|\, :2$;

$x^2 + 10x - 24 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{1} = -5 \pm 7$

$x = -5-7 = -12$ - не удовлетворяет смыслу задачи;

$x = -5+7 = 2$. Ответ: 2 см. ✓

№10.

По формуле $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$, получаем:

$3\left((\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}\right) + 4 = A^3$, тогда $A^3 + 3A =$ ✓

$= -3\left((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}\right) + 4 + 3\left((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}\right) = 4$

Ответ: 4. ✓