ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(a\cdot b)c=a(b\cdot c)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	4	5	5	10	10	10	2	—	—	51	пятьдесят один	

15 20 ~~64~~ апелляция ~~шестьдесят четыре~~

84 восемьдесят четыре

№1

$$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0.$$

$$(x-3)\big((x-1)(x-5)-x(x+3)\big)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x-3=0. \\ (x-1)(x-5)-x(x+3)=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3. \\ x^2-6x+5-x^2-3x=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ 9x=5 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{5}{9}$, 3. ✓

№2

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$$

$D(x)$: $x\in[1;+\infty)$ ✓

$$\sqrt{x-1}=2-\sqrt{3x+1}$$ ✓

$$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(2-\sqrt{3x+1}\right)^2$$

$$x-1=4-4\sqrt{3x+1}+3x+1$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

№2 (продолжение)

$2x+6 = 4\sqrt{3x+1}$

$x+3=2\sqrt{3x+1}$

$(x+3)^2=(\sqrt{3x+1})^2\cdot 4$

$x^2+6x+9=\cancel{3x+1}\ 12x+4$

$\cancel{x^2+3x+8=0}$

$x^2-6x+5=0$

$\frac{D}{4}=9-5=4$

$x_1=1 \quad x_2=5;\quad x_1 x_2 \in D(x)$

Ответ: 1, 5.

№3

$\frac{2}{x+1} \geqslant \frac{3}{x+2}$

$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2} \geqslant 0$

$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$

$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0.$

$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$

$1-x=0 \quad x+1 \neq 0 \quad x+2 \neq 0$

$x=1 \quad x \neq -1 \quad x \neq -2$

$+\ (-2)\ -\ (-1)\ +\ [1]\ -$

$x \in (-\infty;-2) \cup (-1,1]$

Ответ: $(-\infty;-2) \cup (-1;1]$.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

№4

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_{a^n}(x) = \frac{\log_a x}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_9 x = \log_{3^2} x = \frac{\log_3 x}{2}$; $\log_{27} x = \frac{\log_3 x}{3}$

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} = \frac{11}{12}$

$\left(1 + 0,5 + \frac{1}{3}\right) \log_3 x = \frac{11}{12}$

$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$ ✓

$\log_3 x = 0,5.$

по определению, $x = 3^{0,5} = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$ ✓

№5

$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

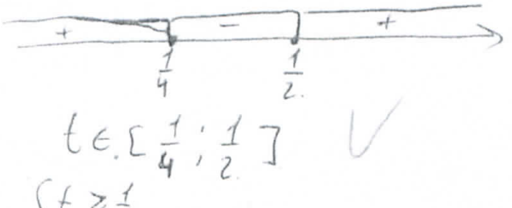
$8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$

$t = 2^x$; $t > 0$

$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$

$t_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $t_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



$t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$ ✓

$\begin{cases} t \geq \frac{1}{4} \\ t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

№5 (продолжение)

$$\begin{cases} 2^x \geq \frac{1}{4} \\ 2^x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x \geq 2^{-2} \\ 2^x \leq 2^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$x \in [-2; -1]$

Ответ: $[-2; -1]$.

№6

Обозначим за x количество сибирских кошек; за y - ангорской; за Z - персидской; за t - сиамской. И получим систему уравнений:

$$\begin{cases} t=2y \\ Z=1,5t \\ x=Z-13 \\ x+y+z+t=77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z=1,5\cdot 2y \\ x=Z-13 \\ x+y+Z+2y=77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-13 \\ x+y+3y+2y=77 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3y+y+3y+2y-13=77.$

$9y=90.$

$y=10$ $\Rightarrow$ ангорской породы - 10 кошек

$t=2y=2\cdot 10=20.$ $\Rightarrow$ сиамской породы - 20 кошек

$Z=1,5t=1,5\cdot 20=30$ $\Rightarrow$ персидской породы - 30 кошек.

$x=Z-13=30-13=17.$ $\Rightarrow$ сибирской породы - 17 кошек.

Ответ: ангорской 10; сиамской 20; персидской 30; сибирской 17.

№7.

$\lg 2;\ \lg(2^x-1);\ \lg(2^x+1)$ - арифм. прогрессия $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lg(2^x-1)-\lg 2 = \lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

№7 (продолжение)

$\lg(2^x+1)+\lg 2 = 2\lg(2^x-1)$ $D(x): 2^x-1>0$

$\lg a+\lg b=\lg ab \Rightarrow$ $2^x>1$

$\Rightarrow \lg(2\cdot(2^x+1))=2\lg(2^x-1)$ $x>0$

$\lg(2\cdot 2^x+2)=2\lg(2^x-1)$

$n\lg a=\lg a^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg(2\cdot 2^x+2)=\lg(2^x-1)^2$

$2\cdot 2^x+2=(2^x-1)^2$ (т.к. оба числа ~~[illegible]~~ положительные)

$2\cdot 2^x+2=2^{2x}-2\cdot 2^x+1$

$2^{2x}-4\cdot 2^x-1=0$

$2^x=t$; $t>1$

$t^2-4t-1=0$

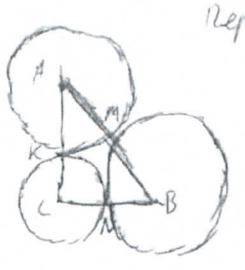
$\frac{D}{4}=4+1=5$

$\left[\begin{array}{l} t_1=2-\sqrt{5} \\ t_2=2+\sqrt{5} \end{array}\right.$ – не корень т.к. $2-\sqrt{5}<1$

$2^x=2+\sqrt{5}$

$x=\log_2(2+\sqrt{5})$

№8



Первый случай: все окр-ти касаются внешним образом.

Дано: $R_1=6$ см

$R_2=4$ см

$\triangle ABC$ – прямоуг. тр.

$A;B;C$ – центры окр-тей.

Найти: r = ?

Решение:

Пусть $M;N;K$ – точки пересечения окр-тей ~~[illegible]~~

Точка касания ~~окр~~ двух окр-тей всегда лежит на отрезке, соединяющем центры $\Rightarrow M\subset AB; N\subset CB; K\subset AC$. ~~[illegible]~~

№8 (продолжение)

AB - гипотенуза => $AB > AC$; $AB > BC$ => $AB = AM + MB = R_1 + R_2$ (т.к. все стороны состоят из двух радиусов, гипотенуза должна состоять из двух наибольших радиусов) => Окр-ть с центром C - наименьшая.

$AB = R_1 + R_2$; $AC = AK + AC = R_1 + r$; $BC = R_2 + r$.

По теореме Пифагора.

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$(R_1 + R_2)^2 = (R_1 + r)^2 + (R_2 + r)^2$

$(6+4)^2 = (6+r)^2 + (4+r)^2$

$36 + 12r + r^2 + 16 + 8r + r^2 = 100.$

$2r^2 + 20r + 52 - 100 = 0$

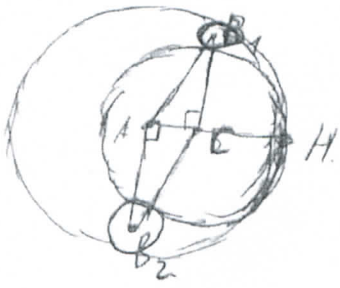
$r^2 + 10r - 24 = 0$

$\frac{D}{4} = 25 + 24 = 49$

$r_1 = -12$ - невозможно т.к. r - длина радиуса.

$r_2 = 2$ => Радиус меньшей окр-ти равен 2 см.

Второй случай: окр-ти касаются внутренним образом.



$AH = R_1 = 6$ см; $CH = R_2 = 4$ см => => $AC = 6$ см $- 4$ см $= 2$ см.

$B_1C = R_2 + r$.

$AB_1 = R_1 - r$

По теореме Пифагора. $AB_1^2 = AC^2 + B_1C^2$

$(6-r)^2 = 4 + (4+r)^2$

$36 - 12r + r^2 = 4 + 16 + 8r + r^2$

$20r = 16$

$r = \frac{4}{5}$ см $= 0,8$ см

Аналогично для $\triangle AB_2C$ $r = 1,2$ см.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2542

№8 (продолжение продолжения)

Ответ: 0,8 см; 1,2 см; 2 см. (в зависимости от способа касания)

№10:

$A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ Обозначим $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=a$

$\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=b$

Заметим, что $a\cdot b=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt[3]{5-4}=1$

Тогда $A^3+3A=(a-b)^3+3(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a-3b=$

$=a^3-3a\cdot ab+3b\cdot ab+3a-3b-b^3=a^3-3a+3b+3a-3b-b^3=$

$=a^3-b^3$. Подставив числа под a и b получим:

$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}-2)=4$

Ответ: 4.