ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

Класс 10 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	4	5	5	10	10	10	15	~~5~~ 0	20	89 84	восемьдесят девять восемьдесят четыре	

№1

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x^2-9)=0$

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0$

$(x-3)((x-1)(x-5)-x(x+3))=0$

$(x-3)(x^2-6x+5-x^2-3x)=0$

$(x-3)(-9x+5)=0$

$x_1=3 \qquad -9x+5=0$

$x_2=\frac{5}{9}$

Ответ: 3 и $\frac{5}{9}$

№2

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$

$\sqrt{x-1}=2-\sqrt{3x+1}$ Возведём в квадрат обе части ур-

$x-1=4-2\cdot2\sqrt{3x+1}+3x+1$

$2\cdot2\sqrt{3x+1}=4+3x+1-x+1$

$4\sqrt{3x+1}=2x+6$

$\sqrt{3x+1}=\frac{2x+6}{4}$

$\sqrt{3x+1}=\frac{x+3}{2}$ возведем обе части в квадрат

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

$$3x+1=\left(\frac{x+3}{2}\right)^2$$

$$3x+1=\frac{x^2+6x+9}{4}$$

$$x^2+6x+9=12x+4$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$(x-5)(x-1)=0$$

$x_1=1$ ✓ $\quad x_2=5$ ✓

Сделав проверку, заметим, что значение $x=5$ не удовлетвор уравнению:

$$\sqrt{5-1}+\sqrt{3\cdot5+1}=2+4=6\neq2$$

Подставим 1:

$$\sqrt{1-1}+\sqrt{3\cdot1+1}=0+2=2$$

Лишний корень получился из-за возведений в квадрат.

Ответ: 2 ?

№3

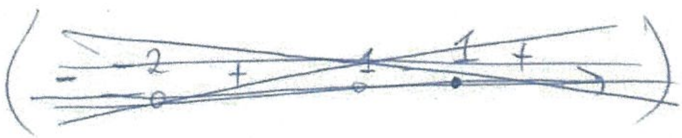
$$\frac{2}{x+1}\geqslant\frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}\geqslant0$$

$$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}\geqslant0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)}\geqslant0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)}\geqslant0$$



ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

№4

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}$

$\cancel{\frac{11}{12}\log_3 x = \frac{11}{12}}$

$\cancel{\log_3 x = 1}$

$\cancel{x = 3^1}$

$\cancel{x = 3}$

$\log_3 x \cdot \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{12}$

$\log_3 x = \frac{11}{12} : \frac{11}{6}$

$\log_3 x = \frac{1}{2}$

$x = 3^{\frac{1}{2}}$

$x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$

ШИФР 5317

№5

$8\cdot4^x+1\le6\cdot2^x$

$8\cdot(2^2)^x+1-6\cdot2^x\le0$

$8\cdot(2^x)^2-6\cdot2^x+1\le0$

Пусть $2^x=t$; $t>0$, т.к $2^x>0$. Тогда:

$8t^2-6t+1\le0$

$\sqrt{D}=\sqrt{6^2-4\cdot8}=\sqrt{36-32}=2$ ✓

$t_1=\frac{6+2}{2\cdot8}=\frac{1}{2}=2^{-1}$ $t_2=\frac{6-2}{2\cdot8}=\frac{1}{4}=2^{-2}$

$\cancel{\left(\begin{matrix}2^x=2^{-1}\\ x_1=-1\end{matrix}\right)}$ $\cancel{\left(\begin{matrix}2^x=2^{-2}\\ x_2=-2\end{matrix}\right)}$

$8t^2-6t+1\le0$ ✓

$8(t-2^{-1})(t-2^{-2})\le0$

$+\quad 2^{-2}\quad -\quad 2^{-1}\quad +$

$2^{-2}\le t\le2^{-1} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x\le2^{-1}\\2^x\ge2^{-2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le-1\\x\ge-2\end{cases} \Leftrightarrow x\in[-2;-1]$

Ответ: $[-2;-1]$ ✓

№6

Пусть на выставке X ангорских кошек. Тогда Сиамских кошек $2X$, а персидских – $2X\cdot1,5=3X$. Тогда сибирских кошек $(3X-13)$.

В сумме: $(3X-13)+X+3X+2X=9X-13$

А по условию 77. Составим и решим уравнение:

$9X-13=77$

$9X=90$

СИБ.	3X−13
А.	X
П.	3X
СИАМ.	2X

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

$X=10$

Тогда:

Сиб.	$3\cdot10-13=17$
А.	10
П.	$3\cdot10=30$
Сиам	$2\cdot10=20$

Ответ: 17 сибирских, 10 ангорских, 30 персидских, 20 сиамских

№7

Возможно 3 принципиально различных случая последовательно

1) $\lg 2;\ \lg(2^x-1);\ \lg(2^x+1)$

2) $\lg(2^x-1);\ \lg 2;\ \lg(2^x+1)$

3) $\lg 2;\ \lg(2^x+1);\ \lg(2^x-1)$

Рассмотрим каждый случай и в каждом применим свойств арифметической прогрессии.

1. $\lg(2^x-1)=\dfrac{\lg(2^x+1)+\lg 2}{2}$

$2\lg(2^x-1)=\lg(2\cdot(2^x+1))$

$\lg(2^x-1)^2=\lg(2\cdot(2^x+1))$

$(2^x-1)^2=2\cdot2^x+2$

$(2^x)^2-2\cdot2^x+1=2\cdot2^x+2$

$(2^x)^2-4\cdot2^x-1=0$

Пусть $2^x=t$, тогда: $(t>0)$

$t^2-4t-1=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{16+4}=2\sqrt5$

$t_1=\dfrac{4+2\sqrt5}{2}=2+\sqrt5$ и $t_2=\dfrac{4-2\sqrt5}{2}=2-\sqrt5$, но $(2-\sqrt5)<0$, т.к. $2<\sqrt5$, т.к. $4<5$

Значит: $2^x=2+\sqrt5$

$X=\log_2(2+\sqrt5)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

2. $\lg 2 = \frac{\lg(2^x+1)+\lg(2^x-1)}{2}$

$2\lg 2 = \lg((2^x+1)(2^x-1))$

$\lg 2^2 = \lg((2^x)^2-1)$

$4=(2^x)^2-1$

$2^{2x}=5$

$2^x=\sqrt{5}$

~~x = log~~

$x=\log_2\sqrt{5}$

3. $\lg(2^x+1)=\frac{\lg 2+\lg(2^x-1)}{2}$

$2\lg(2^x+1)=\lg 2+\lg(2^x-1)$

$\lg(2^x+1)^2=\lg(2\cdot(2^x-1))$

$(2^x+1)^2=2\cdot(2^x-1)$

$2^{2x}+\cancel{2\cdot 2^x}+1=\cancel{2\cdot 2^x}-2$

$2^{2x}=-3$

Что невозможно, т.к. $2^{2x}>0$, а $-3<0$

Ответ: при $x=\log_2(2+\sqrt{5})$ и $x=\log_2\sqrt{5}$

№8

Возможны 2 случая:

1) Наибольшая окружность пересекает гипотенузу.

2) Наибольшая окружность не пересекает гипотенузу.

I Рассмотрим 1-е допущение:

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

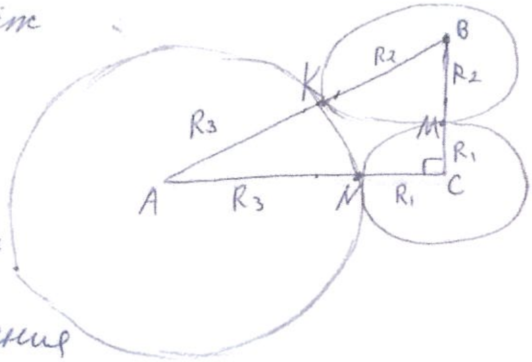
ШИФР 5317

Схематический чертёж

А - ~~вершина~~ центр наибольшей окружности

В - центр средней окружности

С - центр меньшей окружности



K, M и N - точки пересечения

R_1, R_2, R_3 - радиусы меньшей, средней и большей окружностей соответственно.

По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle ABC$:

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

$$(AN+NC)^2+(CM+BM)^2=(BK+AK)^2$$

$$(R_3+R_1)^2+(R_1+R_2)^2=(R_2+R_3)^2$$

$R_3=6$ см $R_2=4$ см по условию, тогда

$$(6+R_1)^2+(R_1+4)^2=(6+4)^2$$

$$R_1^2+12R_1+36+R_1^2+8R_1+16=100$$

$$2R_1^2+20R_1-48=0$$

$$R_1^2+10R_1-24=0$$

$$(R_1+12)(R_1-2)=0$$

$R_1=-12$, что не удовлетворяет условию. или $R_1=2$

$2<4$ и $2<6 \Rightarrow$ значение $R_1=2$ подходит.

Рассмотрим II-е допущение:

~~Схематический чертёж:~~

$$(R_3+R_1)^2+(R_3+R_2)^2=(R_1+R_2)^2$$

$$(6+R_1)^2+100=(R_1+4)^2$$

$$R_1^2+12R_1+36+100=R_1^2+8R_1+16$$

$$12R_1+8R_1=16-36-100$$

$$20R_1=-120$$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

$R_1 = -6$

Что невозможно, значит $R_1 = 2$ см – единственное значени

Ответ: 2 см.

№9

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tg\,x + tg\,y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

1) $x+y=\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi}{4}-y$ (1)

2) $tg\,x+tg\,y=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$$tg\,x+tg\,y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))+\frac{1}{2}(\sin(y-x)+\sin}{\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)+\sin(-(x-y))+\sin(x+y))}{\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))}=\frac{2\sin(x+y)+\sin(x-y)-\sin(x-}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$$

$$=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)} \quad (2)$$

3) Подставим (1) в (2).

$$\frac{2\sin(\frac{\pi}{4}-y+y)}{\cos(\frac{\pi}{4}-y-y)+\cos(\frac{\pi}{4}-y+y)}=\frac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-2y)+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos 2y+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2y+\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}\cos 2y}{2}+\frac{\sqrt{2}\sin 2y}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2y+\sin 2y+1)}=\frac{2}{\cos 2y+\sin 2y+1}$$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

№10

$A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\sqrt[3]{(\sqrt{5})^2-2^2}=\sqrt[3]{5-4}=\sqrt[3]{1}=1$

Значит $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}}$

Пусть $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}=x$, тогда $\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=\dfrac{1}{x}$.

Тогда $A=x-\dfrac{1}{x}$.

$A^3+3A=A(A^2+3)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3\right)=\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\left(x^2-2+\dfrac{1}{x^2}+3\right)=$

$=\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}+1\right)=\dfrac{x^2-1}{x}\cdot\dfrac{(x^2\cdot x^2+1+x^2)}{x^2}=\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^3}=$

$=\dfrac{x^6+x^4+x^2-x^4-x^2-1}{x^3}=\dfrac{x^6-1}{x^3}$

Подставим $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$

$\dfrac{x^6-1}{x^3}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^6-1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3}=\dfrac{(\sqrt{5}+2)^2-1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{5+4\sqrt{5}+4-1}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{4\sqrt{5}+8}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{4(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2}=4$

Ответ: 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 5317

№9

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ tg\,x+tg\,y=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

1) $x+y=\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi}{4}-y$

Подставим это значение во II-е уравнение

$tg\,x+tg\,y=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$tg(\frac{\pi}{4}-y)+tg\,y=3-2\sqrt{3}$

$\frac{tg\frac{\pi}{4}-tg\,y}{1+tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\,y}+tg\,y=3-2\sqrt{3}$ ✓

$-\frac{(1-tg\,y)}{1+tg\,y}+tg\,y=3-2\sqrt{3}$

$\frac{-(1-tg\,y)+tg\,y(tg\,y+1)}{tg\,y+1}=3-2\sqrt{3}$

$\cancel{\frac{1-tg\,y+tg^2y+tg\,y}{tg\,y+1}=3-2\sqrt{3}}$

$\cancel{tg^2y+1=(3-2\sqrt{3})(tg\,y+1)}$

$\cancel{tg^2y+1=(3-2\sqrt{3})tg\,y+3-2\sqrt{3}}$

$\cancel{tg^2y-(3-2\sqrt{3})tg\,y+1-3+2\sqrt{3}=0}$

$\cancel{tg^2y-(3-2\sqrt{3})tg\,y-2+2\sqrt{3}=0}$

~~Пусть $tg\,y=t$, тогда $tg^2y=t^2$~~

$\cancel{t^2-(3-2\sqrt{3})t-(2+2\sqrt{3})=0}$

$\cancel{D=(3-2\sqrt{3})^2+4(2-2\sqrt{3})=9-12\sqrt{3}+12+8-8\sqrt{3}=29-20\sqrt{3}=}$

$\frac{tg^2y+tg\,y+tg\,y-1}{tg\,y+1}=3-2\sqrt{3}$

$tg^2y+2tg\,y-1=(3-2\sqrt{3})tg\,y+3-2\sqrt{3}$

$tg^2y+tg\,y(2-3+2\sqrt{3})-4+2\sqrt{3}=0$

$D=(2\sqrt{3}-1)^2+4\cdot(4-2\sqrt{3})=$

$=12-4\sqrt{3}+1+16-8\sqrt{3}=29-12\sqrt{3}$