



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 1280

Класс 10 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	5	5	5	10	-	15	10	20	79	семьдесят девять	

N1
 $(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$
 $(x^2-4x+3)(x-5) = x^3-9x$
 $x^3-5x^2+20x-4x^2+3x-15 = x^3-9x$
 $-9x^2+32x-15=0$ ✓
 $9x^2-32x+15=0$
 $D_1 = 256-135=121=11^2$
 $x = \frac{16 \pm 11}{9}; x_1 = 3; x_2 = \frac{5}{9}$

Ответ: $3; \frac{5}{9}$. ✓

N2
 $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$
 $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$
 $x \geq 1$
 $(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1})^2 = (2)^2$
 $x-1+3x+1+2\sqrt{3x^2-2x-1} = 4 \quad | \cdot \frac{1}{2}$
 $(\sqrt{3x^2-2x-1})^2 = (2-2x)^2 \quad 2-2x \geq 0; x \leq 1$
 $3x^2-2x-1 = 4-8x+4x^2$
 $0 = x^2-6x+5$
 $D_1 = 9-5=4$
 $x = \frac{3 \pm 2}{1}; x_1 = 1; x_2 = 5, \text{ но } x \leq 1, \text{ а тогда } x=1$

Проверка: $\sqrt{1-1} + \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 2$
 $0 + 2 = 2$ - верно

Ответ: 2 ✓

N3
 $\frac{2}{3} > \frac{3}{4}$

ШИФР 1280

$$\frac{2^{x+2}}{x+1} - \frac{3^{x+1}}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x+1)(x+2) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ (x+1)(x+2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \in (-2, -1) \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

расставим знаки для
 $(x+1)(x+2)$



Соединим корни
 $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1]$

Ответ: $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1]$ ✓

N4

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

Выполним замену $\log_3 x = a$; а тогда
 $\log_9 x = \frac{a}{2}$, $\log_{27} x = \frac{a}{3}$.

$$a + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{6a + 3a + 2a}{6} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11a}{6} = \frac{11}{12}; a = \frac{1}{2}$$

Тогда, $\log_3 x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$. ✓

N6 N5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$2^3 \cdot (2^2)^x + 1 \leq 3 \cdot 2 \cdot 2^x$$

$$2^{2x+3} + 1 \leq 3 \cdot 2^{x+1}$$

$$f(x) = 2^{2x+3} + 1$$

$$g(x) = 3 \cdot 2^{x+1}$$

Обе функции монотонно возрастают

x	1	0	-1	-2	-3
f(x)	33	9	3	1.5	1/8
y					

x	1	0	-1	-2	-3
g(x)	12	6	3	1.5	3/4
y					

Построим схематичные графики:

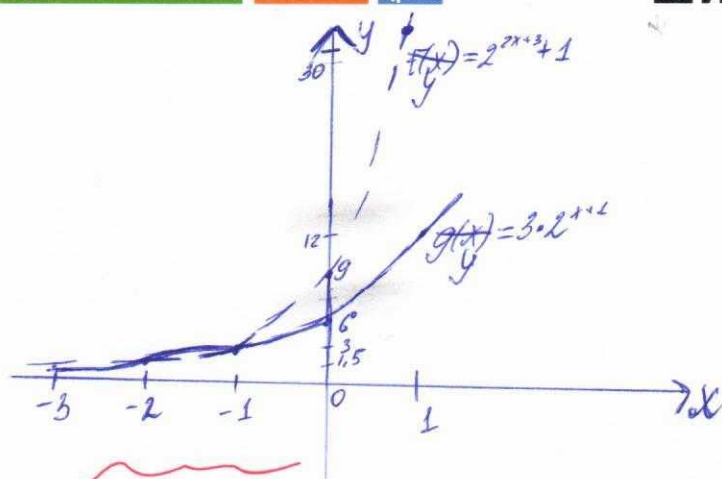


$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 1280



Из графика видно, что на всех участках, кроме участка $[-2; -1]$, $y = 2^{2x+3} + 1$ идет выше $y = 3 \cdot 2^{x+2}$. Разберем этот участок.

Возьмем точку с ного: $x = -1.5$.

$$2^{2 \cdot (-1.5) + 3} + 1 = 2; \quad 3 \cdot 2^{-1.5 + 2} = 3 \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Сравним 2 и $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$2 < \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$4 < 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{16} < \sqrt{18}$$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$, а значит из монотонности функций их равенства при $x = -1$ и $x = -2$, что решение неравенства $x \in [-2; -1]$.

Ответ: $x \in [-2; -1]$.

N6

Пусть было a сибирских котов, b ангорских, c персидских и d сиамских. Тогда также было из условия задачи $2b$ сиамских, $1.5d$ персидских, $a + 13$ персидских, а всего 77. Составим систему

$$\begin{cases} 2b = d \\ 1.5d = c \\ c = a + 13 \\ a + b + c + d = 77 \end{cases}$$

Из нее выскладываем, что: $d = \frac{2c}{3}$; $a = c - 13$; $b = \frac{c}{3}$.

Тогда:

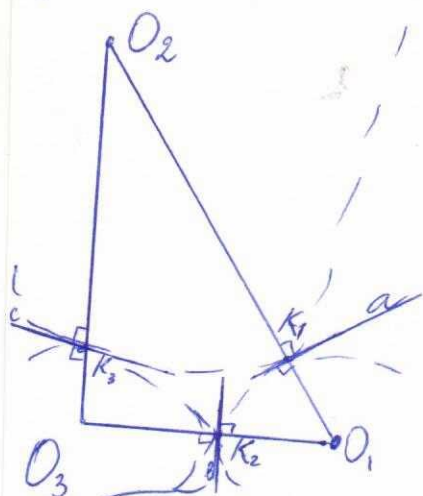
$$c - 13 + \frac{c}{3} + c + \frac{2c}{3} = 77$$

$$3c = 90, c = 30$$

$$a = 17; b = 10; d = 20$$

Ответ: 17 сибирской, 10 акорской, 30 персидской, 20 синайской поре.

N8



Проведем общие касательные a, b и c .
 Тогда $\angle K_3 O_3 K_2 = \angle K_2 O_1 K_1 = \angle K_1 O_2 K_3 = 90^\circ$ по свойству касательной, а тогда $\angle O_3 K_2 O_1 = \angle O_1 K_1 O_2 = \angle O_2 K_3 O_3 = 180^\circ$ и O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой. Тогда $O_2 O_3 = r_2 + r_3$, $O_1 O_2 = r_1 + r_2$, а по т. Пифагора $O_2 O_3^2 + O_1 O_3^2 = O_1 O_2^2$.
 $(r_2 + r_3)^2 + (r_1 + r_3)^2 = (r_1 + r_2)^2$

Возможные значения:

r_1	r_2	r_3
6	4	2
6	2	4
4	6	2
4	2	6
2	6	4
2	4	6

$0 < x < 4$

$$1) 16 + x^2 + 8x + 36 + 12x + x^2 = 100$$

$$2x^2 + 20x - 48 = 0$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$D_1 = 25 + 24 = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2}; x_1 = -12 \text{ (посторонний)}; x_2 = 2 \text{ (подходит)}$$

Возможные уравнения:

$$1) (4+x)^2 + (6+x)^2 = (6+4)^2$$

$$2) (x+4)^2 + (6+4)^2 = (6+x)^2$$

$$3) (x+6)^2 + (4+6)^2 = (4+x)^2$$

рассмотрим каждое



$$2) 16 + x^2 + 8x + 100 = 36 + x^2 + 12x$$

$$-4x + 80 = 0$$

$$x = 20, \text{ посторонний, т.к. } 20 > 4$$

$$3) 36 + x^2 + 12x + 100 = 16 + x^2 + 8x$$

$$4x + 120 = 0$$

$$x = -30, \text{ посторонний, т.к. } x < 0$$

Ответ: 2. ✓

N10

$$A^3 + 3A, \text{ где } A = \sqrt[3]{5+2} - \sqrt[3]{5-2}$$

$$\sqrt[3]{5+2} = a, \sqrt[3]{5-2} = b, (a-b) = A$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = \sqrt{5+2} - \sqrt{5+2} - 3ab(a-b)$$

$$= 4 - 3ab(a-b) = 4 - 3 \cdot \sqrt{(5+2)(5-2)} \cdot (a-b) = 4 - 3 \cdot \sqrt{5-4} \cdot (a-b)$$

$$= 4 - 3 \cdot A$$

$$A^3 = 4 - 3 \cdot A$$

$$A^3 + 3A = 4 - 3A + 3A = 4$$

Ответ: 4. ✓

N9

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \lg x + \lg y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x \\ \lg x + \lg(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\lg(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{\lg \frac{\pi}{4} - \lg x}{1 + \lg \frac{\pi}{4} \cdot \lg x} = \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x}$$

$$\lg x + \frac{1 - \lg x}{1 + \lg x} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \quad | \cdot (1 + \lg x), \lg x \neq -1$$

$$\lg x + \lg^2 x + 1 - \lg x = 3 - 2\sqrt{3} + 3\lg x - 2\sqrt{3} \lg x$$

$$\lg x = a$$

$$a^2 - 3a + 2\sqrt{3}a + 1 - 3 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$a^2 - (3 - 2\sqrt{3})a - (2 - 2\sqrt{3}) = 0$$

$$D = 9 - 12\sqrt{3} + 12 + 8 - 8\sqrt{3} = 29 - 20\sqrt{3} \quad \checkmark$$

(10)

9