ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3967

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н. Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	8	15	14	20	97	девяносто семь	

№1

$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$

$(x^2-4x+3)(x-5) = x^3-9x$

$(x^3-4x^2+3x-5x^2+20x-15) = x^3-9x$

$x^3-x^3-9x^2+23x-15+9x=0$

$-9x^2+32x-16=0$

$D = 1024 - 4\cdot(-9)\cdot(-15) = 1024 - 540 = 484$

$x_1 = \frac{-32-22}{-18} = \frac{-54}{-18} = 3$

$x_2 = \frac{-32+22}{-18} = \frac{-10}{-18} = \frac{5}{9}$

Ответ: $x = 3$, $x = \frac{5}{9}$ ✓

№2

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

ОДЗ: $x \geq 1$ ✓

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1}\right)^2 = 4$

$(x-1) + (3x+1) + 2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4$

$4x + 2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4$

$2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4-4x$

$\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 2x-2$

Ещё раз возведём обе части уравнения в квадрат:

$(x-1)(3x+1) = 4(x-1)^2$

$(x-1)(3x+1) = 4x^2-8x+4$

$(3x^2-2x-1) = 4x^2-8x+4$

$-x^2+6x-5=0$

$x^2-6x+5=0$ ✓

$D = 36-20 = 16$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Если подставить $x=5$ в уравнение, то

$\sqrt{5-1} + \sqrt{5+1} = 2$

$2 + 4 = 2$ (Это невозможно, значит $x=5$ не подходит)

Ответ: $x = 1$ ✓

Обратимся к ОДЗ: $x \geq 1$ (эта норма удовлетворяет неравенству)

~~№3~~

№3.

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

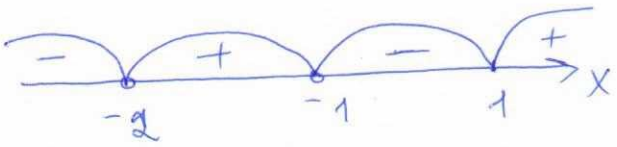
$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$



$\rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓

Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (-1; 1]$.

№4

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$(\log_3 x) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}$

$(\log_3 x) \cdot \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{12}$

$\log_3 x = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{11}{6}} =$

$\log_3 x = \frac{11}{11} \cdot \frac{6}{11} = \frac{1}{2}$

$\log_3 x = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{3}$

Ответ: $x = \sqrt{3}$ ✓

№5

$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

Пусть $2^x = t$, тогда

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

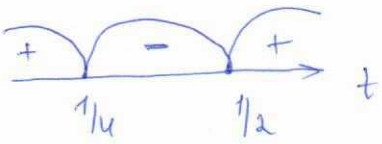
ШИФР 3967.

$8t^2+1 \le 6t$

$8t^2+1-6t \le 0$

$D = 36-32 = 4$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$



$(4t-1)(2t-1) \le 0$

$\rightarrow t \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$\rightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \ge \frac{1}{4} \\ 2^x \le \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;-1]$

Ответ: $x \in [-2;-1]$.

№6

Пусть было x англичанок, тогда испанок было $2x$, немецких – $3x$, а сибирских – $(3x-13)$. Всего было 77 коней. Составим уравнение и решим его:

$x+2x+3x+3x-13 = 77$

$9x = 90$

$x = 10$

Значит было 10 английских коней, 20 испанских, 30 немецких, а сибирских было 17.

Ответ: 10 английских, 20 испанских, 30 немецких, 17 сибирских.

№7

$\lg 2;\ \lg(2^x-1);\ \lg(2^x+1)$.

ОДЗ: $2^x > 1$, $x > 0$; $2^x+1 > 0$, $2^x > -1$ (при $x \in \mathbb{R}$, т.к. 2^x не может быть отрицательным).

Найдём разность прогрессии:

$d = \lg(2^x-1) - \lg 2$

$d = \lg\frac{2^x-1}{2}$

$\rightarrow \lg(2^x-1) + \lg\frac{(2^x-1)}{2} = \lg(2^x+3)$

$\lg\left(\frac{(2^x-1)^2}{2}\right) = \lg(2^x+1)$

$\frac{(2^x-1)^2}{2} = (2^x+1)$

$2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1 = 2\cdot 2^x + 2$

$2^{2x} - 4\cdot 2^x - 1 = 0$

$(2^x = t)$

$t^2 - 4t - 1 = 0$

$D = 16 + 4 = 12$

$t_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$

$t_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$

$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2+\sqrt{3} \\ 2^x = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$?

$x = \log_2(2+\sqrt{3})$

$x = \log_2(2-\sqrt{3})$ (не подходит), т.к. $x < 0$, но ОДЗ: $x > 0$

при этих значениях прогрессия будет возрастающей.

Если прогрессия убывающая, то

$d = \lg 2 - \lg(2^x-1)$

$d = \lg\frac{2}{2^x-1}$

$\Rightarrow \lg(2^x+1) - \lg(2^x-1) = \lg\frac{2}{2^x-1}$

$\frac{2^x+1}{2^x-1} = \frac{2}{2^x-1}$

$2^{2x} - 1 = 2\cdot 2^x - 2$

$2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1 = 0$

$(2^x-1)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 1$. $(1 > 0)$

→ случай возможен.

Ответ: $x = \log_2(2+\sqrt{3})$

$x = 1$.

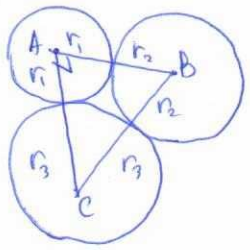
↓ и т.д.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 3967

№8



r_1 - ?
$r_2 = 4$ см
$r_3 = 6$ см

Решение:

1. $BC = 10$ см
$AB = 6 + r_1$
$AC = 4 + r_1$
$\Rightarrow$ т.к. $r_3 > r_2 > r_1$, то
BC - наиб. сторона (гипотенуза)
$\rightarrow \angle A = 90°$

2. Воспользуемся теоремой Пифагора:
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$100 = (6+r_1)^2 + (4+r_1)^2$
$100 = 36 + 12r_1 + r_1^2 + 16 + 8r_1 + r_1^2$
$48 = 20r_1 + 2r_1^2$
$r_1^2 + 10r_1 - 24 = 0$
$D = 100 + 96 = 196$
$r_1 = \frac{-10+14}{2} = 2$
$r_2 = \frac{-10-14}{2} = -12$ (не может быть, т.к. длина стороны не может быть отрицательной)

$\rightarrow r_1 = 2$ см

Ответ: $r_1 = 2$ см ✓

№9

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ tgx + tgy = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \frac{tgx + tgy}{1 - tgx\,tgy} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{1 - tgx\,tgy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ tg(x+y) = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{1-tgx\,tgy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ tg\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)}{1-tgx\,tgy} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - y \\ 1 = \frac{3-2\sqrt{3}}{1 - tg(\frac{\pi}{4}-y)\,tgy} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - y \\ 1 - \frac{(1-tgy)\,tgy}{1+tgy} = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - y \\ \frac{1+tgy+tgy+tg^2y}{1+tgy} = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Пусть $(tgy = t)$

$$\frac{1+2t+t^2}{1+t} = (3-2\sqrt{3})$$

$$t^2 + 2t + 1 = (3-2\sqrt{3})(1+t)$$

$$t^2 + 2t + 1 = 3 - 2\sqrt{3} + (3-2\sqrt{3})t$$

$$t^2 - t + 2\sqrt{3}t - 2 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$t^2 + t - 2\sqrt{3}t + 2 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$t^2 + (1-2\sqrt{3})t + (2-2\sqrt{3}) = 0$$

$$D = 1 + 4\sqrt{3} + 12 - 8 + 8\sqrt{3} = 5 + 4\sqrt{3}$$

$$t^2 + 1 = (3-2\sqrt{3}) + t(3-2\sqrt{3})$$

$$t^2 - (3-2\sqrt{3})t + (2\sqrt{3}-2) = 0$$

$$D = 9 - 12\sqrt{3} + 12 + 8\sqrt{3} + 8 = 29 - 20\sqrt{3}$$

$$t^2 - (3-2\sqrt{3})t + (2\sqrt{3}-2) = 0$$

$$D = 9 + 12 - 12\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 8 = 29 - 20\sqrt{3}$$

?

$$-tgx\,tgy = 2 - 2\sqrt{3}$$

$$tgx\,tgy = 2\sqrt{3} - 2$$

$$\left(\frac{1-tgy}{1+tgy}\right) tgy = 2\sqrt{3} - 2$$

$$tgy - tg^2y = (2\sqrt{3}-2) + (2\sqrt{3}-2)tgy$$

$$t - t^2 = (2\sqrt{3}-2) + (2\sqrt{3}-2)t$$

$$-t^2 + (3t - 2\sqrt{3})t - (2\sqrt{3}-2) =$$

№10

$$A^3 = (\sqrt{5}+2) - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^2(\sqrt{5}+2)} - \sqrt{5} + 2 = 4 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+2)} +$$

$$+ 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)} = 4 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)}$$

$$3A = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$\rightarrow A^3 + 3A = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4$$

Ответ: 4