ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7866

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Баумана.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	10	5	20	95	девяносто пять.	

№1

$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-5)$

$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x-5) = 0$

$(x-3)(x^2-6x+5-x^2+3x) = 0$

$(x-3)(-3x+5) = 0$

$\Downarrow$

$x-3=0$ или $-3x+5=0$

$x=3$ $\quad x=\frac{5}{3}$

Ответ: $\left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$ ✓

№2

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

Возведём в квадрат

$x-1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}+3x+1=4$

$4x+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4$ ✓

$\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 2-2x$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 2-2x \geq 0 \\ (x-1)(3x+1) = (2-2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2-2x-1-4+8x-4x^2=0 \end{cases} \rightarrow \checkmark \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-6x+5=0 \end{cases}$

№3

$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$y = \frac{\pi}{4} - x$,

$\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}x} =$

$= \frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$

$\operatorname{tg}x + \frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$ ✓

$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x+1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$\frac{\operatorname{tg}^2x+1}{\operatorname{tg}x+1} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$\begin{cases} (\operatorname{tg}x+1)^2 - 2\operatorname{tg}x \\ \operatorname{tg}x+1 \end{cases} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$1-\operatorname{tg}x = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$-\operatorname{tg}x = 3-2\sqrt{3}-1$

$\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}-2) \\ y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}-2) \end{cases}$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}-2)$; $y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}-2)$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7866

$x^2-6x+5=0$

по т Виета

$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1 x_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1 \end{cases}$

$(x-1)(x-5)=0$

$x=1$ или $x=5$

но, объединяем все условия

$\begin{cases} (x-1)(x-5)=0 \\ x\le 1 \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ ✓

Ответ: 1

№3. $\frac{2}{x+1} \ge \frac{3}{x+2}$

$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \ge 0$

$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \ge 0$ ✓

$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)(x+2) \le 0 \\ (x+1)(x+2) \ne 0 \end{cases}$



$\Downarrow$

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

№4.

$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$ ОДЗ: $x>0$ ✓

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$ ✓

$\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\sqrt{3}$ ✓

Ответ: $\sqrt{3}$

№1.

$\lg 2,\ \lg(2^x-1),\ \lg(2^x+1)$

ОДЗ: $2^x-1>0 \Rightarrow x>0$,

1) Предположим, что

$\lg 2 \cdot d = \lg(2^x-1),\ \lg(2^x-1)\cdot d = \lg(2^x+1)$

тогда $\lg(2^x-1)-\lg 2 = \lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)$

$\frac{2^x-1}{2} = \frac{2^x+1}{2^x-1}$ ✓

$2^{2x}-2\cdot 2^x+1-2\cdot 2^x-2=0$

$2^{2x}-4\cdot 2^x-1=0$

$\frac{D}{4}=4+1=5$,

$2^x = 2\pm\sqrt{5}$, но $2^x>0$, $2-\sqrt{5}<0$ не подх.

$x=\log_2(2+\sqrt{5})$ ✓

2) Предположим, что

$\lg(2^x-1)\cdot d = \lg(2^x+1)$

$\lg(2^x+1)\cdot d = \lg 2$

$\Downarrow$

$\frac{2^x+1}{2^x-1} = \frac{2}{2^x+1}$,

$2^{2x}+2\cdot 2^x+1-2\cdot 2^x+2=0$

$2^{2x}=-3$, $\varnothing$

3) Предположим, что

$\lg(2^x-1)\cdot d = \lg 2$,

$\lg 2\cdot d = \lg(2^x+1)$

$\frac{2}{2^x-1} = \frac{2^x+1}{2}$

$4 = 2^{2x}-1$,

$2^{2x}=5$

$x=\frac{1}{2}\log_2 5$

Ответ: $\{\log_2(2+\sqrt{5}),\ \frac{1}{2}\log_2 5\}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7866

№5.

$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

$2^x = t, \ t > 0.$

$8t^2 + 1 - 6t \leq 0$

Найдем нули

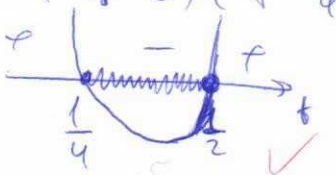
$8t^2 - 6t + 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

Вернемся к неравенству

$8\left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{4}\right) \leq 0$



$\Downarrow$

$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$ — обратная замена $\Rightarrow \frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$-2 \leq x \leq -1$

Ответ: $[-2; -1]$

№10

$A^3 = \sqrt{5}+2 - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^2 - \sqrt{5}+2 =$

$= 4 - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^2$

$A^3 + 3A = 4 - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}^2 +$

$+ \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4 - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\left(\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - 1\right) +$

$+ \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\left(\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} - 1\right)$

$\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{1} = 1$

$\Downarrow$

$4 - \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}(1-1) + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}(1-1) =$

$= 4$

Ответ: 4

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7866

№6.

Возьмем кол-во анкорских копеек за x шт. По условию сианских в 2 раза больше чем А $\rightarrow 2x$, а персидских в 1,5 раз больше, чем сианских $\rightarrow 3x$, а сибирских на 13 меньше чем П. $3x-13$. В сумме их 77 $\rightarrow$ составим и решим уравнение.

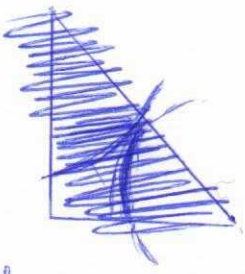
$x+2x+3x+(3x-13)=77$

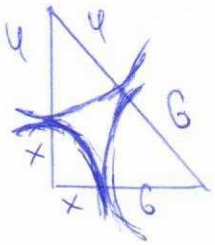
$9x=90$

$x=10$ $\rightarrow$ Анкорской породы 10, сианской $2\cdot 10=20$, персидской $1,5\cdot 20=30$, сибирской $30-13=17$ копеек.

Ответ: Анкорских $\rightarrow$ 10 копеек, сианских $\rightarrow$ 20 копеек, персидских $\rightarrow$ 30 копеек, сибирских $\rightarrow$ 17 копеек.

№8.





Введем x - радиус меньшей окр-ти, $x>0$

Т.к. 6 и 4 - радиусы большой и средней окружности, вместе они составляют целую гипотенузу треугольника (т.к. если они попарно касающиеся, то касаются они на сторонах треугольника)

Согласно т. Пифагора $(6+4)^2=(4+x)^2+(x+6)^2$

$100=x^2+12x+36+x^2+8x+16$

$2x^2+20x+52-100=0$

$x^2+10x-24=0$

$\frac{D}{4}=25+24=49$

$\begin{cases} x=\frac{-5+7}{1}=2 \\ x=\frac{-5-7}{1}=-12, x>0, \varnothing \end{cases}$

Ответ: 2