ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.ФЕВРАЛЯ 2017

Площадка написания МГТУ имени Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	2	5	10	10	10	15	15	20	97	девяносто семь	[illegible]

1. $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$; По ФСУ: $(x^2-9)=(x-3)(x+3)$

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x^2-9)=0$;

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0$;

$(x-3)((x-1)(x-5)-x(x+3))=0$;

$(x-3)(x^2-5x-x+5-x^2-3x)=0$;

$(x-3)(-9x+5)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ -9x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$ ✓

Ответ: $x_1=3$; $x_2=\frac{5}{9}$.

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$.

Область допустимых значений. По определению квадратного корня:

$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$.

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3x+1}+3x+1=4$. ✓

$2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4-4x$. На ОДЗ $(x-1)(3x+1)\geq 0$.

$\sqrt{(x-1)(3x+1)}=2(1-x)$. Возведем обе части уравнения в квадрат

$(x-1)(3x+1)=4(1-x)^2$

$3x^2+x-3x-1=4(1-2x+x^2)$

$3x^2-2x-1=4-8x+4x^2$.

$x^2-6x+5=0$. ✓

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{(-6)}{1}=6 \\ x_1\cdot x_2=\frac{5}{1}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5 \\ x_2=1. \end{cases}$$

Так как мы решали не исходное уравнение, а производное от него, в процессе решения могли появиться лишние корни.

Проведем проверку:

$\sqrt{5-1}+\sqrt{15+1}=\sqrt{4}+\sqrt{16}=2+4=6\neq 2$, сл-но, $x=5$ – не корень уравнения.

$\sqrt{1-1}+\sqrt{3+1}=0+\sqrt{4}=2$. Значит, $x=1$ – корень уравнения.

Ответ: $x=1$.

3. $\frac{2}{x+1}\geq\frac{3}{x+2}$. ОДЗ: по условию существования дроби

$$\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -2. \end{cases}$$

$\frac{2^{\backslash x+1}}{x+1}-\frac{3^{\backslash x+2}}{x+2}\geq 0$; $\frac{2(x+1)-3(x+2)}{(x+1)(x+2)}\geq 0$; $\frac{2x+2-3x-6}{(x+1)(x+2)}\geq 0$;

и т.д.

$\frac{-x-4}{(x+1)(x+2)}\geq 0$; $\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}\leq 0$;

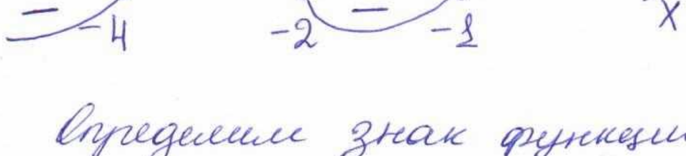
Обозначим левую часть неравенства через $f(x)$.

$f(x)=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}$.

Нули функции: $f(x)=0$; $x=-4$.

ОДЗ: $x\neq-1$; $x\neq-2$.

Отметим нули и ОДЗ функции на числовой оси:



Определим знак функции на каждом из числовых промежутков.

$f(-5)=\frac{-5+4}{(-5+1)(-5+2)}=\frac{-1}{-4\cdot(-3)}=-\frac{1}{12}<0$; $f(-3)=\frac{-3+4}{(-3+1)(-3+2)}=\frac{1}{-2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}>0$

$f(-1,5)=\frac{-1,5+4}{(-1,5+1)(-1,5+2)}=\frac{2,5}{-0,5\cdot 0,5}=\frac{2,5}{-0,25}=-10<0$; $f(0)=\frac{4}{1\cdot 2}=2>0$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

Значит, решениями неравенства будут являться промежутки:

$$\left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ -2 < x < -1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -4] \cup (-2; -1)$.

4. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$; ОДЗ: $x>0$ по опр-ю логарифма.

$\log_9 x = \frac{1}{\log_x 9} = \frac{1}{2\log_x 3} = \frac{1}{2}\log_3 x$. Аналогично: $\log_{27} x = \frac{1}{3}\log_3 x$.

Получим:

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$; $1\frac{5}{6}\log_3 x = \frac{11}{12}$; $\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{12}$;

$\log_3 x = \frac{11}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$\log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

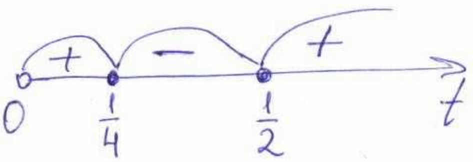
Ответ: $x = \sqrt{3}$.

5. $8\cdot 4^x + 1 \le 6\cdot 2^x$; $8\cdot(2^2)^x + 1 \le 6\cdot 2^x$; $8\cdot 2^{2x} + 1 \le 6\cdot 2^x$.

Замена: $2^x = t$, $t>0$.

$8t^2 - 6t + 1 \le 0$; Обозначим $f(t) = 8t^2 - 6t + 1$

Нули функции: $t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{16} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{16} = \frac{6\pm 2}{16}$ $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$



Определим знаки функции на каждом из числовых промежутков.

$f(\frac{1}{8}) = 8(t-\frac{1}{2})(t-\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{8}) = 8(\frac{1}{8}-\frac{1}{2})(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}) = 8\cdot(-\frac{3}{8})\cdot(-\frac{1}{8}) = 8\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8} > 0$.

$f(\frac{1}{3}) = 8(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = 8\cdot(-\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{12} = -8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12} < 0$

$f(0) = 8(0-\frac{1}{2})(0-\frac{1}{4}) = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} > 0$

Значит, $\frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2}$.

Возвращаемся к старой переменной: ~~$\frac{1}{4} \ge \log$~~ $\frac{1}{4} \le 2^x \le \frac{1}{2}$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

$-2 \le x \le -1$.

Ответ: $x \in [-2; -1]$.

6. Пусть $x \in N$ – количество ангорских кошек на выставке. Тогда сиамских кошек $2x$, сибирских $3x-13$, а персидских – $1{,}5 \cdot 2x = 3x$. Т.к. всего на выставке 77 кошек, получим уравнение:

$$x + 2x + 3x + 3x - 13 = 77.$$

$$\cancel{9x-13}\ 9x - 13 = 77;\quad 9x = 90;\quad x = 10.$$

Тогда получим, что на выставке было представлено $x=10$ ангорских кошек, $2x=20$ сиамских кошек, $3x-13=17$ сибирских кошек, $3x=30$ персидских кошек.

Ответ: 10 ангорских, 20 сиамских, 17 сибирских, 30 персидских.

7. По основному свойству арифметической прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. Так как числа $\lg 2, \lg(2^x-1), \lg(2^x+1)$ в прогрессии могут стоять в любом порядке, рассмотрим 3 случая:

I. $\lg 2 = \frac{\lg(2^x-1)+\lg(2^x+1)}{2} = \frac{\lg(2^x-1)(2^x+1)}{2}$.

ОДЗ: $2^x-1>0$; $2^x>1$; $x>0$; $2^x+1>0$ $\forall x$. Значит, $x>0$.

$\lg 2 = \frac{\lg(2^{2x}-1)}{2}$; $\lg(2^{2x}-1) = 2\lg 2$; $\lg(2^{2x}-1) = \lg 2^2$.

$2^{2x}-1 = 2^2$; $2^{2x} = 5$; $2x = \log_2 5$; $x = \frac{1}{2}\log_2 5 > 0$.

II. $\lg(2^x-1) = \frac{\lg 2 + \lg(2^x+1)}{2}$; $\lg(2^x-1) = \frac{\lg 2(2^x+1)}{2}$;

$\lg 2(2^x+1) = 2\lg(2^x-1)$; $\lg 2(2^x+1) = \lg(2^x-1)^2$;

$2(2^x+1) = (2^x-1)^2$; $2\cdot 2^x + 2 = 2^{2x} - 2\cdot 2^x + 1$.

$2^{2x} - 4\cdot 2^x - 1 = 0$. Замена: $2^x = t, t>0$.

$t^2 - 4t - 1 = 0$; $t_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{4\pm 2\sqrt{5}}{2} = 2\pm\sqrt{5}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

$t_1 = 2+\sqrt{5}$;

$t_2 = 2-\sqrt{5}$; по ОДЗ $t>0$, сл-но, $t=2-\sqrt{5}$ не является корнем.

$2^x = 2+\sqrt{5}$; $x = \log_2(2+\sqrt{5})$. $x>0$, т.к. $2+\sqrt{5}>2$.

III. $\lg(2^x+1) = \dfrac{\lg 2+\lg(2^x-1)}{2}$; $\lg(2^x+1) = \dfrac{\lg 2(2^x-1)}{2}$.

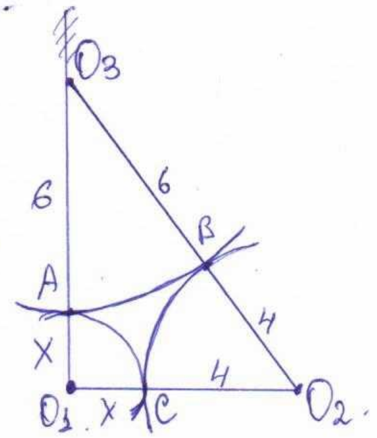
$2\lg(2^x+1) = \lg 2(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)^2 = \lg 2(2^x-1)$; $(2^x+1)^2 = 2(2^x-1)$.

$2^{2x}+2\cdot 2^x+1 = 2\cdot 2^x-2$; $2^{2x}=-3$, что невозможно, т.к. $2>0$.

Значит, в III случае решений нет.

Ответ: $x=\frac{1}{2}\log_2 5$; $x=\log_2(2+\sqrt{5})$.

8. Пусть центры $O_1; O_2; O_3$ ок-тей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ лежат в вершинах пр/уг Δ-ка O_1, O_2, O_3 и ~~попарно~~ окружности попарно касаются в точках A, B, C.



Точка касания двух окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры.

Поэтому точки касания A, B, C лежат на сторонах Δ-ка $O_1O_2O_3$.

$AO_3 = BO_3$ как радиусы. Аналогично:

$BO_2 = CO_2$; $CO_1 = AO_1$.

По теореме Пифагора для $\Delta O_1O_2O_3$: $O_1O_3^2+O_1O_2^2=O_2O_3^2$.

Обозначим радиус меньшей окружности x. Ясно, что гипотенуза Δ-ка – это сумма радиусов большей и средней окружности, т.к. гипотенуза больше обоих катетов. Получим уравнение:

$(x+4)^2+(x+6)^2=(4+6)^2$; $x^2+8x+16+x^2+12x+36=100$;

$2x^2+20x+52=100$; $x^2+10x+26=50$; $x^2+10x-24=0$, где $x>0$.

По теореме Виета:

$\begin{cases} x_1+x_2=-10 \\ x_1\cdot x_2=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-12 \\ x_2=2 \end{cases}$ Учтем ОДЗ: $x>0$, получим: $x=2$.

Значит, радиус меньшей окружности равен 2.

Ответ: 2.

ГАЗПРОМ **ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 2750

10. $A^3+3A = A(A^2+3) = \left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)\left(\left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)^2+3\right) =$

$= \left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)\left((\sqrt5+2)^{\frac23}-2\left((\sqrt5+2)(\sqrt5-2)\right)^{\frac13}+(\sqrt5-2)^{\frac23}+3\right) =$

$= \left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)\left((\sqrt5+2)^{\frac23}-2\overset{=1}{(5-4)}^{\frac13}+(\sqrt5-2)^{\frac23}+3\right) =$

$= \left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)\left((\sqrt5+2)^{\frac23}+(\sqrt5-2)^{\frac23}+1\right) = (\sqrt5+2)^{\frac13}\cdot(\sqrt5+2)^{\frac23}+(\sqrt5+2)^{\frac13}(\sqrt5-2)$

$+(\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\cdot(\sqrt5+2)^{\frac23}-(\sqrt5-2)^{\frac13}(\sqrt5-2)^{\frac23}-(\sqrt5-2)^{\frac13} = \sqrt5+2+\left((\sqrt5+2)(\sqrt5-2)\right)^{\frac13}(\sqrt5$

$+(\sqrt5+2)^{\frac13}-\left((\sqrt5-2)(\sqrt5+2)\right)^{\frac13}(\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)-(\sqrt5-2)^{\frac13} =$

$= \cancel{\sqrt5}+2+\overset{=1}{(5-4)}^{\frac13}(\sqrt5-2)^{\frac13}+(\sqrt5+2)^{\frac13}-\overset{=1}{(5-4)}^{\frac13}(\sqrt5+2)^{\frac13}-\cancel{\sqrt5}+2-(\sqrt5-2)^{\frac13} =$

$= 4+\cancel{(\sqrt5-2)^{\frac13}}+\cancel{(\sqrt5+2)^{\frac13}}-\cancel{(\sqrt5+2)^{\frac13}}-\cancel{(\sqrt5-2)^{\frac13}} = 4.$

Ответ: 4.

9. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \lg x+\lg y=\sqrt3(\sqrt3-2) \end{cases}$ $\quad y=\frac{\pi}{4}-x;\ \lg y=\lg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\lg\frac{\pi}{4}-\lg x}{1+\lg\frac{\pi}{4}\cdot\lg x}=\dfrac{1-\lg x}{1+\lg x}$

$\lg x+\dfrac{1-\lg x}{1+\lg x}=\sqrt3(\sqrt3-2);\quad \dfrac{\lg^2x+\lg x+1-\lg x}{1+\lg x}=\sqrt3(\sqrt3-2);\quad \dfrac{\lg^2x+1}{\lg x+1}=\sqrt3(\sqrt3-2);$

Если $\lg x\neq 1$, то: $\lg^2x+1-\lg x\sqrt3(\sqrt3-2)-\sqrt3(\sqrt3-2)=0;$

$\lg^2x+\lg x(2\sqrt3-3)+1-3+2\sqrt3=0;\quad \lg^2x+\lg x(2\sqrt3-3)+2\sqrt3-2=0;$

$D=(2\sqrt3-3)^2-4(2\sqrt3-2)=12-12\sqrt3+9-8\sqrt3+8=29-20\sqrt3$

Оценка: $\sqrt3\approx1{,}71$; $1{,}71\cdot20=34{,}2>29\Rightarrow D<0$ и корней нет.

Если $\lg x=-1$, то $\lg y=3-2\sqrt3+1=4-2\sqrt3=2(2-\sqrt3)$.

$\lg x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n+y=\frac{\pi}{4};\ y=\frac{\pi}{2}-\pi n$, значит, $\lg y$ не существует.

Значит, у системы нет решений.

Ответ: нет решений.