ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7512

Класс 10 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э.БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	4	10	10	10	15	–	10	74	семьдесят четыре	

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 75 12

№1.

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

$x=3$

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x-3)(x+3) \mid :(x-3)$

$(x-1)(x-5)=x(x+3)$ ✓

$x^2-5x-x+5=x^2+3x$

$-6x+5=3x$

$9x=5$

$x=\frac{5}{9}$

Ответ: $\frac{5}{9}$; 3 ✓

№2

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -\frac{1}{3} \end{cases}$ $x\in[1;+\infty)$ ✓

$\sqrt{x-1}=2-\sqrt{3x+1}$, возведем в квадрат обе части

$x-1=4-4\sqrt{3x+1}+3x+1$

$-4\sqrt{3x+1}=-2x-6 \mid \cdot(-1)$ ✓

$4\sqrt{3x+1}=2x+6 \mid :2$

$2\sqrt{3x+1}=x+3$, возведем в квадрат обе части

$4(3x+1)=x^2+6x+9$ ✓

$12x+4=x^2+6x+9$

$x^2-6x+5=0$

$D=36-20=16$

$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{6+4}{2}=5 \\ x_2=\frac{6-4}{2}=1 \end{array}\right.$ ✓ Ответ: 1. ✓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7512

№3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$ ✓

$$\frac{2(x+2)}{x+1} - \frac{3(x+1)}{x+2} \geq 0$$

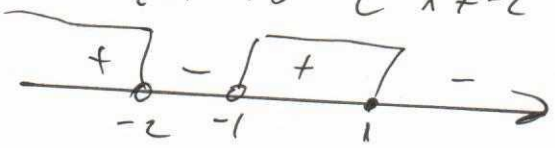
$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Н. ф. $1-x=0$

$x=1$

$D(y)$ $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓

№4

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

ОДЗ: $x > 0$

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12}$$ ✓

№4

$\frac{11}{6}\log_3 x = \frac{11}{12} \quad | \cdot \frac{6}{11}$

$\log_3 x = \frac{1}{2}$

$x = \sqrt{3}$ Ответ: $\sqrt{3}$. ✓

№5.

$8 \cdot 4^x + 1 \le 6 \cdot 2^x$

$8 \cdot 2^{2x} + 1 - 6 \cdot 2^x \le 0$

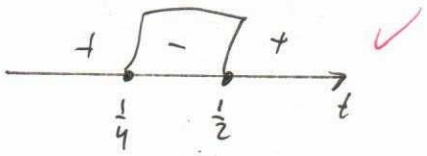
пусть $2^x = t$

$8t^2 - 6t + 1 \le 0$ ✓

ч. кв. $8t^2 - 6t + 1 = 0$

$D = 36 - 32 = 4$

$\begin{cases} t_1 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$



✓

обратная замена переменной

$\begin{cases} 2^x \ge \frac{1}{4} \\ 2^x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ $(2 > 1)$ $\begin{cases} x \ge -2 \\ x \le -1 \end{cases}$ Ответ: $x \in [-2; -1]$. ✓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7512

№6

сибирские
английские
персидские
сиамские в 2 р.

на 13 м.

в 1,5 р.

77

Пусть английские кошки x, тогда сиамки 2x, персидские 3x, а сибирские 3x−13, в общем 77, составим уравнение ✓

$x + 3x + 2x + 3x - 13 = 77$

$9x = 90 \mid :9$

$x = 10$

Ответ: ✓ английских - 10 кошек
сиамских - 20 кошек
персидских - 30 кошек
сибирских - 17 кошек

№4

пусть $\lg 2 - a_1$

$\lg(2^x - 1) - a_2$

$\lg(2^x + 1) - a_3$

$a_2 = a_1 + d$

$d = a_2 - a_1$

$d = \lg(2^x - 1) - \lg 2$

$d = \lg\left(\frac{2^x - 1}{2}\right)$ ✓

$a_3 = a_1 + 2d$

$\lg(2^x + 1) = \lg 2 + 2\lg\left(\frac{2^x - 1}{2}\right)$

$\lg\left(\frac{2^x + 1}{2}\right) = \lg\left(\frac{2^x - 1}{2}\right)^2$

$\frac{2^x + 1}{2} = \frac{2^x - 1}{2}$

$\frac{2 \cdot 2^x + 2}{4} = \frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1}{4}$

$\frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 - 2 \cdot 2^x - 2}{4} = 0 \mid \cdot 4$

пусть $2^x = t$

$t^2 - 4t - 1 = 0$

$D = 16 + 4 = 20$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} \\ t_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} \end{array}\right.$ ✓

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2 + \sqrt{5} \\ t_2 = 2 - \sqrt{5} \end{array}\right.$

ОДЗ.

$\left[\begin{array}{l} 2^x = 2 + \sqrt{5} \\ 2^x = 2 - \sqrt{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \log_2 2 + \sqrt{5} \\ x \in \varnothing \end{array}\right.$

Ответ: $\log_2 2 + \sqrt{5}$ ✓

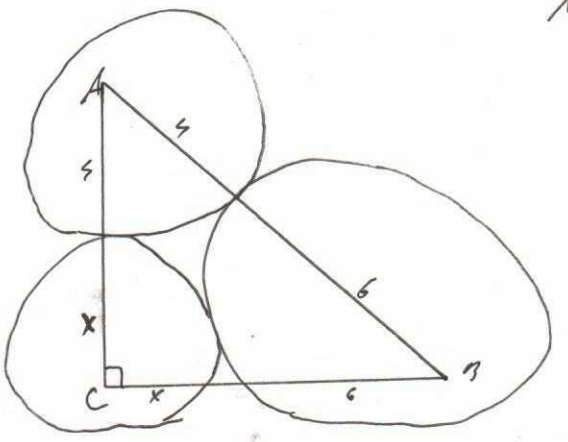
если $a_2 = \lg(2^x + 1)$, то $x \in \varnothing$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР F512

№8



Дано:
$\triangle ABC$ - прямоугол.
$\angle C = 90°$
A - центр окр. $(A; R')$
B - центр окр. $(B; R'')$
C - центр окр. $(C; R''')$
$R' = 4$ см
$R'' = 6$ см

$R''' - ?$

* пусть $R''' - x$, тогда по теор. Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ ✓

$(x+4)^2 = 100 - (6+x)^2$

$16 + 8x + x^2 = 100 - 36 - 12x - x^2$ | :2

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$D = 100 + 96 = 196$

$x_1 = \frac{-10+14}{2} = 2$ ✓

$x_2 = \frac{-10-14}{2} = -12$ - не подходит по условию задачи

Ответ: 2 см. ✓

* т.к. треугольник ABC - прямоугол. $\Rightarrow$ точки пересечения окр. $(A; R')$ и окр. $(B; R'')$ и окр. $(C; R''')$ будут лежать на сторонах $\triangle ABC$.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 7512

№ 10

A^3+3A, если $A=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=$

$=\left(\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)}+3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{5}+2\right)+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=$

$=\left(4-3\sqrt[3]{\sqrt{5}^3-2^3}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}^3+2^3}\right)+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=4+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}^6-2^6}\right)+$

$3\sqrt[3]{\sqrt{5}^2-2^2}=4+3\cdot\sqrt{61}+3=7+3\sqrt{61}$