

ШИФР 7 2 7 3

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	20	95	девятая пять	

Задача 1

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9) = x(x-3)(x+3)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$$

$$(x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) = 0$$

$$(x-1)(x-5) - x(x+3) = x^2 - 5x - x + 5 - x^2 - 3x = -9x + 5 \Rightarrow$$

$$(x-3)(5-9x) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} x=3 \\ 5-9x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Ответ: $x=3$; $x=\frac{5}{9}$ $\checkmark$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

$$\sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x-1}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$

Возведём обе части в квадрат:

$$3x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1 \quad \checkmark$$

$$2x-2 = -4\sqrt{x-1}$$

$$x-1 = -2\sqrt{x-1} \quad \text{снова возведём в квадрат:}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4x - 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{По т. Виета:}$$

$$x=1$$

$$x=5$$

Сделаем проверку:

$$\text{Если } x=1 \quad \sqrt{1-1} + \sqrt{3 \cdot 1 + 1} = 0 + 2 = 2$$

$$\text{Если } x=5 \quad \sqrt{5-1} + \sqrt{3 \cdot 5 + 1} = 2 + 4 = 6 \neq 2 \Rightarrow$$

Ответ: $x=1$ $\checkmark$

не являемся корнем $\checkmark$

Задача 3

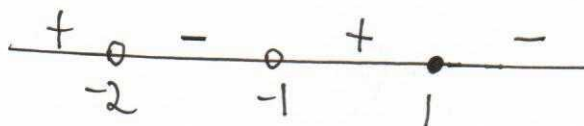
$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$2x+4-3x-3 = 1-x \Rightarrow$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 1]$ ✓

Задача 4.

$$\log_3 x + \log_8 x + \log_{27} x = \frac{11}{12} \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

Воспользуемся свойством логарифмов, что $\log_a x = \frac{1}{k} \log_{a^k} x$

$$\log_3 x + \log_8 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{12} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6+3+2}{6} = \frac{11}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad | \cdot \frac{6}{11}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$ ✓

Задача 5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$$

Сделаем замену $t = 2^x$, при этом $t > 0$

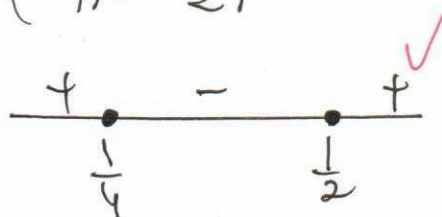
$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0 \quad \text{Найдём корни трёхчлена } 8t^2 - 6t + 1$$

$$8t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

$$t = \frac{6 \pm 2}{16} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 8(t - \frac{1}{4})(t - \frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$$(t - \frac{1}{4})(t - \frac{1}{2}) \leq 0$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 2^x & \frac{1}{2} &= 2^x \\ 2^{-2} &= 2^x & 2^{-1} &= 2^x \end{aligned}$$

$$x = -2$$

$$x = -1$$

$t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ Т.к. функция 2^x — возрастающая, большему значению x соответствует большее значение $t \Rightarrow$ решением исходного неравенства будет следующий промежуток:

$$x \in [-2, -1]. \quad \text{Ответ: } x \in [-2, -1]$$

Задача 6.

Пусть амурских кошек было x , тогда сиамских — 2 персидских $45 - 2x = 3x$, а сибирских $3x - 13$. Т.к. всего кошек было 77 $\Rightarrow$

$$x + 2x + 3x + 3x - 13 = 77$$

$$9x = 90$$

$$x = 10$$

$$2x = 20, \quad 3x = 30, \quad 3x - 13 = 17$$

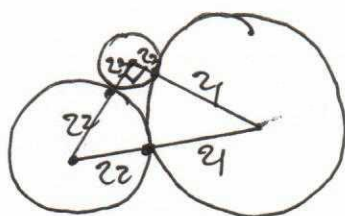
Ответ: амурских было 10, сиамских было 20, персидских было 30, а сибирских 17. ✓

Задача 8.

П.к точка касания ^{двух} окружностей лежит на линии их центров, то сторона Δ равна сумме соответствующих радиусов окружностей. П.к интангуза больше любого из катетов, то она равна сумме радиусов наибольшей и средней окружностей.

$\Rightarrow$ интангуза равна $6\text{ см} + 4\text{ см} = 10\text{ см}$.

Пусть радиус меньшей окружности равен x , тогда катеты равны $(6+x)$ и $(4+x)$ см. Тогда по м. Пифагора



$$10^2 = (6+x)^2 + (4+x)^2$$

$$100 = 36 + 12x + x^2 + 16 + 8x + x^2$$

$$2x^2 + 20x - 48 = 0$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 24 = 100 + 96 = 196$$

$$x_1 = \frac{-10 + 14}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-10 - 14}{2} = -12 \text{ — не имеет смысла, т.к. сторона — число } \geq 0 \Rightarrow$$

Ответ: радиус меньшей окружности равен 2. ✓

Задача 7.

$$\lg 2, \lg(2^x - 1), \lg(2^x + 1).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$$

П.к 2^x — возраст. функция и $x \geq 0 \Rightarrow$

$$\lg(2^x - 1) < \lg 2 < \lg(2^x + 1)$$

$$\lg 2 < \lg(2^x - 1) < \lg(2^x + 1) \text{ при } x > \log_2 3$$

при $x \in (0; \log_2 3)$

по св-ву арифм. прогр.

Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифм. прогр., если $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$

Если $x \in (0; \log_2 3)$, то

$$2 \lg 2 = \lg(2^x - 1) + \lg(2^x + 1)$$

Если $x > \log_2 3$, то:

$$2 \lg(2^x - 1) = \lg 2 + \lg(2^x + 1)$$

$$\lg 4 = \lg(2^x - 1)(2^x + 1) \Rightarrow$$

$$\lg((2^x - 1)^2) = \lg(2(2^x + 1)) \Rightarrow$$

$$4 = (2^x - 1)(2^x + 1) = 2^{2x} - 1$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \log_2 5$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$2^x = t, t > 0$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$x = \frac{\log_2 5}{2}$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 7273

Задача 7 (продолжение)

$$t_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} \geq \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \geq 2 + \sqrt{5}$$

$$t_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \text{ — не удовлетворяет } \text{OD } 3 \Rightarrow$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

Ответ: $x = \frac{\log_2 5}{2}$; $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$ ✓

Задача 10.

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$A^3 = (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 = \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2} \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5}-2$$

$$3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2} \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} = 3\sqrt[3]{(5+4\sqrt{5}+4)(\sqrt{5}-2)} = 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} =$$

$$= 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}-18+20-8\sqrt{5}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$$

$$3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} = 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(9-4\sqrt{5})} = 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}-20+18-8\sqrt{5}} = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

Тогда $A^3 = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4 - 3A$. Тогда:

$$A^3 + 3A = 4 - 3A + 3A = 4.$$

Ответ: 4. ✓

Задача 9.

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$y = \frac{\pi}{4} - x$$

$$\tan x + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

Ответ: $(\arctan(-2\sqrt{3} + \sqrt{29-20\sqrt{3}}) + \pi n, \frac{\pi}{4} - \arctan(-2\sqrt{3} + \sqrt{29-20\sqrt{3}}))$
 $(\arctan(-2\sqrt{3} - \sqrt{29-20\sqrt{3}}) + \pi n, \frac{\pi}{4} - \arctan(-2\sqrt{3} - \sqrt{29-20\sqrt{3}}))$
 $n \in \mathbb{Z}$

Воспользуемся формулой $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

$$\tan x + \tan \frac{\pi}{4} - \tan x = 3 - 2\sqrt{3} \quad \tan \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x}{1 + \tan x} = 3 - 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan x + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 3 - 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\tan x + \tan^2 x + 1 - \tan x = (3 - 2\sqrt{3})(1 + \tan x)$$

$$\tan^2 x + 1 = 3 + 3\tan x - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\tan x$$

$$\tan^2 x - 3\tan x + 2\sqrt{3} + \tan x - 2 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\tan^2 x + (2\sqrt{3} - 3)\tan x - 2 + 2\sqrt{3} = 0 \quad t = \tan x$$

$$t^2 + (2\sqrt{3} - 3)t - 2 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$D = (2\sqrt{3} - 3)^2 - 4(-2 + 2\sqrt{3}) = 12 - 12\sqrt{3} + 9 + 8 - 8\sqrt{3} = 29 - 20\sqrt{3} \geq 0$$

$$t = \frac{-2\sqrt{3} + 3 \pm \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2}$$

$$x = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3 \pm \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2}\right) + \pi n$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3} + 3 \pm \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2}\right) + \pi n$$

$n \in \mathbb{Z}$

OD 3:
 $\tan x \neq 1$
 $\cos x \neq 0$