



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР 9988

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 14 февраля 2017г.

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	20	95	девяносто пять	

$$1. (x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x-3)(x+3) \quad / (x-3)$$

$$x=3$$

$$(x-1)(x-5) = x(x+3)$$

$$x^2 - x - 5x + 5 = x^2 + 3x$$

$$9x = 5$$

$$x = \frac{5}{9}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{9}; 3. \quad \checkmark$$

$$2. \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$$

$$\text{ОДЗ: } \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ 3x+1 \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{array} \right\} x \geq 1 \quad \checkmark$$

Пусть:

$$1) \sqrt{x-1} = a, \quad a \geq 0$$

$$\text{тогда: } x = a^2 + 1$$

$$2) \sqrt{x-1} = 0$$

$$x = 1$$

$$a + \sqrt{3(a^2+1)+1} = 2$$

$$\sqrt{3a^2+4} = 2-a$$

$$3a^2+4 = 4-4a+a^2$$

$$2a^2+4a = 0$$

$$a = 0; a = -2$$

не уга ОДЗ

$$\text{Ответ: } 1 \quad \checkmark$$

ШИФР 9988

$$3. \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2} ; \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0 ; \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0 ;$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0 ; -\frac{(x-1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$


Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$. ✓

$$4. \log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12} ; \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12} ;$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} ; \log_3 x = \frac{1}{2} \quad x = \sqrt{3}$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$. ✓

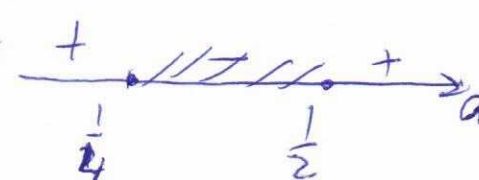
$$5. p \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

Пусть: $2^x = a, a > 0$; тогда: $p \cdot a^2 + 1 \leq 6a$; $pa^2 - 6a + 1 \leq 0$

Нужно: $pa^2 - 6a + 1 = 0$

$$D = 36 - 32 = 4 \quad \sqrt{D} = 2$$

$$a_1 = \frac{6+2}{16} \quad a_2 = \frac{6-2}{16}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \checkmark$$


Обратная замена:

$$\begin{cases} 2^x \geq \frac{1}{4} \\ 2^x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x \geq 2^{-2} \\ 2^x \leq 2^{-1} \end{cases}$$

$$x \geq -2$$

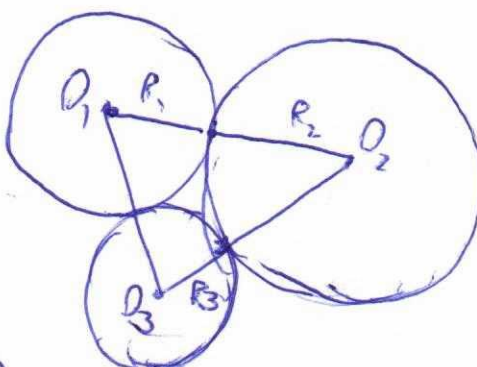
$$x \leq -1$$

Ответ: $x \in [-2; -1]$. ✓

ШИФР

9988

$R_1 = 4$
 $R_2 = 6$
 $R_3 = x$



003
 $\times 20$
 $\checkmark$

Рассмотрим $\triangle O_1 O_2 O_3$.

$\angle O_1 O_2 O_3 = 90^\circ$, т.к. $O_1 O_2 O_3$ — прямоугольный, а этот угол является тупым.

Следовательно:

$$(R_1 + R_2)^2 = (R_2 + R_3)^2 + (R_1 + R_3)^2 ; 100 = (4 + x)^2 + (6 + x)^2 \checkmark$$

$$16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2 = 100 ; 2x^2 + 20x - 48 = 0 ; x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$D = 100 + 96 = 196 \quad \sqrt{D} = 14$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = -12 \quad x_2 = 2$$

не подходит.

Ответ: 2. $\checkmark$

Р. Для начала вычислим A^3 , $A^3 = 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 + \underbrace{3\sqrt{5}+2 \cdot \sqrt{5}+2 \cdot \sqrt{5}-2}_{1} - \underbrace{3\sqrt{5}+2 \cdot \sqrt{5}-2 \cdot \sqrt{5}-2}_{3A} = 4 + 3A - 3A = 4$

$$A^3 + 3A = 4 - 3A + 3A = 4$$

Ответ: 4. $\checkmark$

$$2^x = 2^{\log_2(2+\sqrt{5})}$$

$$x = \log_2(2+\sqrt{5}) \quad \checkmark$$

9. $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$

$$\tan x + \tan y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2); \quad \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

т.к. $x+y = \frac{\pi}{4}$, то $\sin(x+y) = \cos(x+y)$, а $\Rightarrow \frac{\cos(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$, откуда:

$$\frac{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2); \quad 1 + \tan x \tan y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

из 2 выражений $\tan y$: $\tan y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) - \tan x$ подставим сюда:

$$1 + \tan x (3-2\sqrt{3} - \tan x) = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \quad \checkmark; \text{ пусть } \tan x = a, \text{ тогда:}$$

$$1 + (3-2\sqrt{3})a - a^2 - 3 + 2\sqrt{3} = 0; \quad -a^2 - (3-2\sqrt{3})a + 2 + 2\sqrt{3} = 0 \quad 1 + (3-2\sqrt{3})a - a^2 = 3-2\sqrt{3}$$

$$D = 9 - 12\sqrt{3} + 12 - 8 + 8\sqrt{3} = 13 - 4\sqrt{3} = (2\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3}-1)^2$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3}-1$$

$$a_{1,2} = \frac{3-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+1}{2} \quad a_2 = \frac{3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}{2}$$

$$a_1 = 2-2\sqrt{3}$$

$$a_2 = 1$$

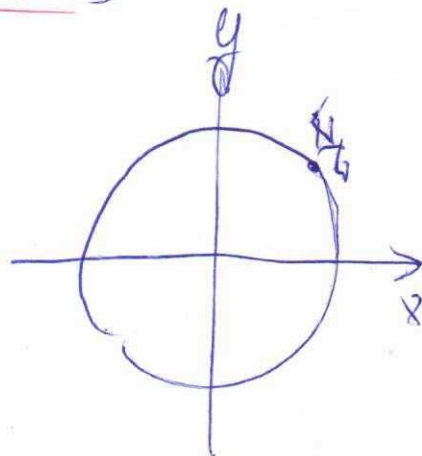
$$\tan x = 2-2\sqrt{3}$$

$$\tan x = 1$$

$$x_1 = \arctg(2-2\sqrt{3}) + \pi n$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$y_1 = \frac{\pi}{4} - \arctg(2-2\sqrt{3}) - \pi n \quad y_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \pi n; \quad y_2 = -\pi n$$



6. Воспавзуюсь таблицей, пусть x - к-во амурских камней, тогда:

Сибирские	Амурские	Периодские	Самские	Всего
$1,5 \cdot 2x - 13$	x	$1,5 \cdot (2x)$	$2x$	77

составим ур-ие:

$$1,5 \cdot 2x - 13 + x + 1,5 \cdot 2x + 2x = 77 \quad 2) 2 \cdot 10 = 20 \text{ - самские}$$

$$9x = 90$$

$$3) 20 \cdot 1,5 = 30 \text{ - периодские}$$

$$1) x = 10 \text{ - ~~сам~~ амурские}$$

$$4) 30 - 13 = 17 \text{ - сибирские}$$

Ответ: сибирские - 17

амурские - 10

периодские - 30

самские - 20

7. Пусть $\lg 2 = a$, а d - д.т.п. прогрессии, тогда:

$$\begin{cases} \lg(2^x - 1) = a + d \\ \lg(2^x + 1) = a + 2d \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(2^x - 1) = \lg 2 + d \\ \lg(2^x + 1) = a + 2d \end{cases} \quad \begin{aligned} &: d = \lg(2^x - 1) - \lg 2 \\ &d = \lg \frac{2^x - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\lg(2^x + 1) = \lg 2 + 2 \cdot \lg \left(\frac{2^x - 1}{2} \right)$$

$$\lg(2^x + 1) = \lg 2 \cdot \left(\frac{2^x - 1}{2} \right)^2 \quad ; \quad \lg(2^x + 1) = \lg \frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1}{2}$$

$$2^x + 1 = \frac{2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1}{2}$$

$$; 2 \cdot 2^x + 2 = 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1; \quad \text{Пусть: } 2^x = a, \quad \text{ODЗ: } a > 0, \text{ тогда:}$$

$$2a + 2 = a^2 - 2a + 1; \quad a^2 - 4a - 1 = 0 \quad ; \quad D = 16 + 4 = 20; \quad \sqrt{D} = 2\sqrt{5}$$

$$a_1 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$a_2 = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$(a_1 = 2 + \sqrt{5})$$

$$(a_2 = 2 - \sqrt{5})$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

~~не подходит~~

не подходит