

ШИФР 11098

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	5	5	10	10	10	15	10	20	96	девяносто шесть	

1. $(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$

$$(x^2-3x-x+3)(x-5) = x^3-9x$$

$$(x^2-4x+3)(x-5) = x^3-9x$$

$$x^3-5x^2-4x^2+20x+3x-15 = x^3-9x$$

$$\cancel{x^3}-5x^2-4x^2+20x+3x-15-\cancel{x^3}+9x=0$$

$$-9x^2+32x-15=0$$

$$9x^2-32x+15=0$$

$$(x-3)(9x-5)=0$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Отв: 3 и $\frac{5}{9}$ ✓

$$\begin{array}{r|l} 9x^2-32x+15 & x-3 \\ \hline 9x^2-27x & 9x-5 \\ \hline -5x+15 & \\ \hline -5x+15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$ ✓ $(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1})^2 = 4$

$$x-1+3x+1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4$$

$$2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4 - 4x$$

$$(x-1)(3x+1) = 4 - 8x + 4x^2$$

$$3x^2+x-3x-1 = 4-8x+4x^2$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$D=4^2 \quad x = \frac{6 \pm 4}{2}; \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

Отв: 1 ; 5 ✓

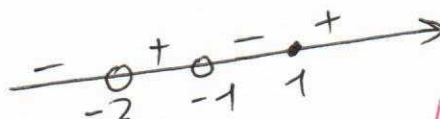
«оба корня подходят»

3. $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \\ \frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$



$$\text{Отв: } (-\infty; -2) \cup (-1; 1] \quad \checkmark$$

4. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

Пусть $\log_3 x = t$, то $\checkmark$

$$t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t = \frac{11}{12}$$

$$12t + 6t + 4t = 11$$

$$22t = 11$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\text{Отв: } \sqrt{3} \quad \checkmark$$

5. $8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

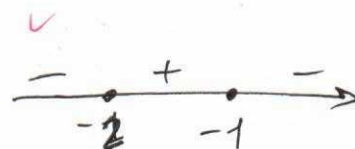
пусть $2^x = t$

$8 \cdot t^2 + 1 \leq 6t$

$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$

$D = 36 - 32 = 4 = 2^2$

$t = \frac{6 \pm 2}{16} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = \frac{1}{4} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$



Отв: $[-2; -1]$ ✓

6.

Сиб.	Анг.	Пер.	Слам.
$(1.5 \cdot 2x) - 13$	x	$1.5 \cdot 2x$	$2x$

Пусть Анг. = x

Всего 77 кошек. $\Rightarrow$

$(3x - 13) + (x) + (3x) + (2x) = 77$

$13 + 77 = 9x$

$90 = 9x$

$x = 10 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow 3x - 13 = 17$

Отв: ~~17~~ Сибирских - 17;

Ангорских - 10; ✓

Персидских - 30;

Сламок - 20.

ШИФР 11098

7. $\lg 2; \lg(2^x - 1); \lg(2^x + 1)$

, т.к. это арифметическая прогр., т.

При $x = 0$

~~$\lg 2; \lg 0; \lg 1$ (не абв.)~~

При $x = 1$

~~$\lg 2; \lg 1; \lg 2$ (не абв.)~~

При $x = 2$

~~$\lg 2; \lg 3; \lg 5$~~

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = \lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1)$$

$$\lg\left(\frac{2^x - 1}{2}\right) = \lg\left(\frac{2^x + 1}{2^x - 1}\right)$$

$$\frac{2^x - 1}{2} = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$$

$$(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 1) \quad \checkmark$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0 \quad \checkmark$$

Пусть $2^x = t$, то, при $t > 0$

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$D = 16 + 4 = 20$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}, \begin{cases} t_1 = 2 + \sqrt{5} > 0 \\ t_2 = 2 - \sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

Отв: $\log_2(2 + \sqrt{5}) \quad \checkmark$



$$(ab)c = a(bc)$$

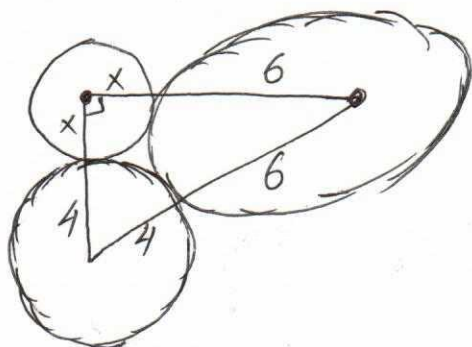
$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11098

8.



По теор. Пифагора: $(x+4)^2 + (x+6)^2 = 100$ ✓

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 12x + 36 = 100$$

$$2x^2 + 20x - 48 = 0$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$D = 100 + 96 = 196 = 14^2$$

$$x = \frac{-10 \pm 14}{2} \quad \begin{cases} x = 2 > 0 & (\checkmark) \\ x = -12 < 0 & (\times) \end{cases}$$

Отв: 2 ✓

9.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$x + y = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$x + y = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$x + y = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sin(x+y) \cdot 2}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y)} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) \quad \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(x-y)$$

$$\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}(\sqrt{3} - 2)}{(3 - 2\sqrt{3})2} = \cos(x-y)$$

$$\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{3 \cdot 6 - 4\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6 - 4\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} x - y = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6 - 4\sqrt{3}}\right) \\ x = \frac{\pi}{4} - y \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} - y$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 2y = \arccos\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{3}}\right) \\ \dots \end{cases}$$

$$y = \frac{\frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{3}}\right)}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{\arccos\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{3}}\right)}{2}$$

Отв: $\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\arccos\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{3}}\right)}{2}, \frac{\pi}{8} - \frac{\arccos\left(\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{6 - 4\sqrt{3}}\right)}{2}\right)$

10



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР 11098

10. $A^3 + 3A = ?$

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$A^3 + 3A = (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 + 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}) =$$

$$= \sqrt{5}+2 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2})^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^2 \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt{5}+2 + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

* Пусть $a = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$; $b = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$$\text{Тогда } -3a^2b + 3ab^2 + 3a - 3b + 4 \Rightarrow 3ab(b-a) + 3(a-b) + 4$$

$$ab = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \sqrt[3]{5-4} = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 3(b-a) + 3(a-b) + 4 \Rightarrow \cancel{3b} + \cancel{3a} + \cancel{3a} - \cancel{3b} + 4$$

Отв: 4 ✓