

ШИФР 876

Класс 10 Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания МГТУ им. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	3	0	68	шестьдесят восемь	

№1.

$$(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x - 2) = 5$$

Замена: $x^2 - 2x = t \Rightarrow (t+2) \cdot (t-2) = 5$

$$t^2 - 4 = 5$$

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

$$\begin{cases} t=3 \\ t=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 3 \\ D < 0 \Rightarrow \text{корней нет.} \end{cases}$$

Ответ: $x = -1, x = 3$ ✓

2.

$$\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$$

$$\sqrt{3x-3} = 4 + \sqrt{x-3} \quad |^2$$

$$\begin{cases} 3x-3 = 16 + x-3 + 8\sqrt{x-3} & (1) \\ 3x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x \geq 3$$

$$(1): 2x - 16 = 8\sqrt{x-3} \quad | :2$$

$$x - 8 = 4\sqrt{x-3} \quad |^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 16x - 48 \quad (2)$$

$$x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$(2): x^2 - 24x + 64 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 64 = 576 - 256 = 320$$

Handwritten calculations for problem 2, showing the discriminant calculation and the resulting quadratic equation.

$$\begin{cases} x^2 - 16x + 64 = 16(x-3) & (2) \\ x-8 \geq 0 \Rightarrow \underline{x \geq 8} \end{cases}$$

$$(2): x^2 - 32x + 112 = 0$$

$$D = 32^2 - 4 \cdot 112 = 1024 - 448 = 576 = 24^2$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{1,2}}{x_{1,2}} &= \frac{+32}{-} \\ \left\{ \begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{32 \pm 24}{2} = \begin{bmatrix} 28 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x &\geq 8 \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\text{Order: } x = 28} \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2-x} < x^{2^{12-x}}$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2-x} - \frac{(2-x) \cdot (x^2)}{2-x} \quad \text{LO}$$

$$\frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1 - 2x^2 + x^3}{2-x} \angle \bigcirc$$

$$\frac{x-1}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$$

Orber: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ ✓

4.

$$\lg(3x-1) - \frac{1}{2} \lg(x+1) = \frac{1}{2} \lg(x+13)$$

$$\lg(3x-1) - \lg(x+1)^{1/2} = \lg(x+3)^{1/2}$$

$$\lg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x+13}}\right) = \lg(\sqrt{x+13}) \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+13}$$

$$3x-1 = \sqrt{(x+13) \cdot (x+1)} \quad |^2$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 14x + 13 & (1) \\ 3x - 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 1 \Rightarrow \underline{x \geq \frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$(1): 8x^2 - 20x - 12 = 0 \quad | :4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 = 7^2$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-0,5 \\ x \neq 1/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ответ: } x=3.} \quad \checkmark \quad (5)$$

5.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{x^2-4x+7}$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-4x+7} \Leftrightarrow x+1 < x^2-4x+7 \quad (1)$$

$$(1): x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$x_1=2, x_2=3 \Rightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)} \quad \checkmark \quad (10)$$

6.

Пусть электродвиг. типа А - а штук;
типа В - в штук.

Тогда на тип А расходуется 2·а кг меди и 4·а кг свинца;
на тип В - 3·в кг меди и 5·в кг свинца.

Известно, что всего меди 146 кг, свинца 258 кг $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2a + 3b = 146 \Rightarrow 2a = 146 - 3b \Rightarrow 4a = 292 - 6b \\ 4a + 5b = 258 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1): 292 - 6b + 5b = 258$$

$$6b - 5b = 292 - 258$$

$$\underline{b=34}$$

$$2a = 146 - 3b \Rightarrow 2a = 146 - 3 \cdot 34 = 44 \Rightarrow \underline{a=22}$$

Ответ: ~~34~~ 22 электродвиг. типа А и 34 - типа В. $\checkmark$

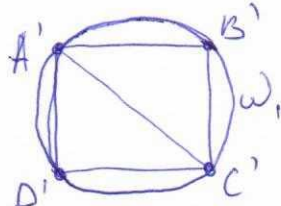
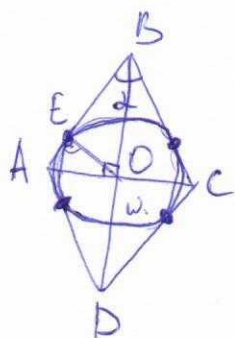


7.

$$S_{An} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow 36 = \frac{4+5}{2} \cdot n \Rightarrow \frac{n}{2} = 4 \Rightarrow \boxed{n=8}$$

Ответ: 8 ✓

8.



Дано: ABCD - ромб
 $\alpha = 30^\circ$
 ω , впис. в ABCD
 $A'B'C'D'$ - квадрат
 $A'B'C'D'$ вписан в ω ,

Найти: $\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}$

Решение:

1. Проведем AC и BD. По св-ву ромба, $AC \perp BD$; $AC \cap BD = O$
 2. BD - диаг. $\Rightarrow \angle ABD = \frac{1}{2} \angle B = 15^\circ$

3. Пусть $AB = a$.

$$\triangle ABO: \sin \angle ABO = \sin 15^\circ = \frac{AO}{a}$$

4. E - т. касания ω , с [AB]. По св-ву кас., $OE \perp AB$

5. $\triangle ABO \sim \triangle AOE$:

$$\begin{cases} \angle BAO = \angle EAO \text{ (общий)} \\ \angle AEO = \angle AOB = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle ABO = \angle AOE = 15^\circ$$

6. $\triangle AOE$:

$$\cos 15^\circ = \cos \angle AOE = \left(\frac{AO}{EO} \right)^{-1}, \text{ где } EO - r \text{ окр. } \omega,$$

7. Из п. 3 и п. 6 следует:

$$\begin{cases} \frac{AO}{a} = \sin 15^\circ \Rightarrow AO = a \cdot \sin 15^\circ \\ \frac{EO}{AO} = \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{EO}{a \cdot \sin 15^\circ} = \cos 15^\circ \Rightarrow \frac{EO}{a} = \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \end{cases}$$

$$\frac{2r}{a} = 2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

$$\frac{2r}{a} = \sin 30^\circ$$

8. Пусть $A'B' = b$.

9. $A'C' = b\sqrt{2}$ (диаг. $\square$) $= 2r$

10. $b\sqrt{2} = 2r$
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{2r}{a} = \sin 30^\circ \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin 30^\circ}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$

11. $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 2 = a^2 \cdot \sin 30^\circ$

12. $S_{A'B'C'D'} = b^2 = \frac{a^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{2}$

13. Из п. 11 и п. 12:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}} = \frac{a^2 \cdot \sin 30^\circ \cdot 2}{a^2 \cdot \sin^2 30^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2 : \frac{1}{2} = 4.$$

Ответ: 4 ✓

9.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} & (2) \\ x+y = \frac{2\pi}{3} & (1) \end{cases}$$

(1): $x+y = 120^\circ$

(2): $\sin x + \cos y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \Rightarrow x=y=60^\circ$

Проверка:

$x+y = 120^\circ \Rightarrow 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ - верно.

Ответ: $x=y=60^\circ$

Подбором значений /
таблицей синуса. (3)