ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13782

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	8	10	8	15	10	20	91	девяносто один	

1. $(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5)=x\underbrace{(x-3)(x+3)}_{=x^2-9}$

очевидно, что $x=3$ является корнем данного ур-я, т.к. обе его части при $x=3$ равняются 0.

Если $x\neq 3$, то $x-3\neq 0$ => мы можем поделить обе части ур-я на $x-3$

Получим:

$(x-1)(x-5)=x(x+3)$

$x^2-6x+5=x^2+3x$

$9x=5$

$x=\frac{5}{9}$ ✓

Мы нашли все корни данного ур-я, т.к. преобразования были равносильны, никакими корнями мы не пренебрегли.

Ответ. $x=3$, $x=\frac{5}{9}$ ✓

2. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$

ОДЗ: Чтобы $\sqrt{x-1}$ и $\sqrt{3x+1}$ существовали, нужно, чтобы подкоренные были больше либо равны 0. =>

$\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$ ✓

При данном ОДЗ посмотрим на 2-й корень $-\sqrt{3x+1}$

При $x\geq 1$ $3x+1\geq 4 \Rightarrow \sqrt{3x+1}\geq 2$ (если x возрастает, то и $\sqrt{3x+1}$ возрастает т.к. $3x+1$ возрастает)

Каждый из корней (не ур-я, а из $\sqrt{x-1}$ и $\sqrt{3x+1}$) больше либо равен 0.

При $x>1$ $\sqrt{3x+1}>2 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x-1}}_{>0}+\underbrace{\sqrt{3x+1}}_{>2}>2$, т.е. нер-во не выполняется =>

$x=1$, тогда $\sqrt{x-1}=0$ ✓

и $\sqrt{3x+1}=2$

И, сложив эти два значения, получим, что $x=1$ явл. корнем этого ур-я.

Ответ: $x=1$*

* причем было доказано то, что других корней у нер-ва быть не может.

✓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13782

6. Пусть ангорских кошек было a штук, тогда сиамских кошек $2a$ штук, персидских кошек $2a \cdot 1,5 = 3a$ штук, а сибирских кошек $3a-13$ штук.
Всего кошек 77. Сложим количество кошек каждой породы:

$a+2a+3a+3a-13=77$

$9a=90$

$a=10 \Rightarrow$ ангорских кошек 10 штук

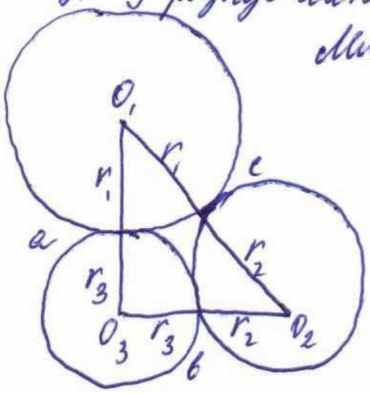
$2a=20 \Rightarrow$ сиамских кошек 20 штук

$3a=30 \Rightarrow$ персидских кошек 30 штук

$3a-13=17 \Rightarrow$ сибирских кошек 17 штук ✓

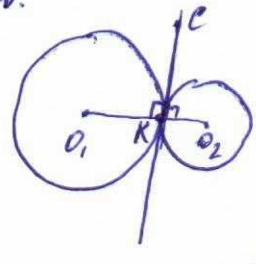
Ответ: 10-ангор., 20-сиам, 30 перс., 17 сибир.

8. Пусть радиус меньшей ок-ти равен r.



Лемма. Точка касания касающихся ок-тей лежит на линии центров.

Док-во.



Проведем общую касательную к этим ок-тям, проходящую через их точку касания.
Проведем радиусы в эту точку касания. Они перпендикулярны общей касательной (каждый из них)

Найдем угол O_1KO_2. $\angle O_1KO_2 = \angle O_1KC + \angle O_2KC = 90+90=1$

O_1, K, O_2 лежат на одной прямой.
(K - точка касания, C - любая точка на общ. касательной, не совп. с K)

Используя данную лемму, получаем
Пусть катеты у треугольника равны a и b, гипот. $=c$
и радиусы ок-тей равны r_1, r_2, r_3.

Тогда $a=r_1+r_3$, $b=r_2+r_3$, $c=r_1+r_2$

Гипотенуза в треугольнике больше каждого из катетов (из-за того что в прямоуг. треуг. катет равен произв. гипотенузы на cos прилеж. угла, а cos прил. угла <1)

$r_1+r_2 > r_2+r_3$ $(c>b)$

$r_1>r_3$ ✓

$r_1+r_2>r_1+r_3$ $(c>a)$

$r_2>r_3 \Rightarrow r_3$ - наименьший радиус - как раз тот, который нам нужно найти. ✓

c равен сумме больших радиусов $\Rightarrow c=6+4=10$

Т. Пифагора для прямоуг. треугольника с катетами a, b и гипот. c:

$(r+4)^2+(r+6)^2=100$

$2r^2+20r+52=100 \Rightarrow 2r^2+20r-48=0 \Rightarrow r^2+10r-24=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} r=2 \\ r=-12 \text{ — не уд.} \end{array}\right.$ (т. Виета) $\Rightarrow r=$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13782

3. $\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$ ОДЗ: $x \neq -1$, $x \neq -2$ иначе знаменатели обращаются в 0.

$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+1} \leq 0$. Приведём к общему знаменателю.

$\frac{3x+3-2x-4}{(x+2)(x+1)} \leq 0$

$\frac{x-1}{(x+2)(x+1)} \leq 0$

Применим метод интервалов:

$-$; -2 ; $+$; -1 ; $-$; 1 ; $+$

$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

4. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = \frac{11}{12}$

$\frac{6\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x}{6} = \frac{11}{12}$

$\frac{11\log_3 x}{6} = \frac{11}{12}$

$\log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

5. $8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$

Пусть $t = 2^x$, $t > 0$, тогда

$8 \cdot t^2 + 1 \leq 6 \cdot t$

$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$

Найдём корни ур-я $8t^2 - 6t + 1 = 0$, тогда тем промежутком, который нам нужен, будет являться промежуток между этими корнями.

$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{8}$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$t = 2^x$

1: $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

2: $2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2$

Ответ: $x = -1$; $x = -2$

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 13782.

10. Найти A^3+3A, если $A=\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}$

$A^3=\sqrt5+2-3\sqrt[3]{\sqrt5+2}^2\cdot\sqrt[3]{\sqrt5-2}+3\sqrt[3]{\sqrt5+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt5-2}^2-\sqrt5+2$ (т.к. $(a+b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$\exists\ a=\sqrt[3]{\sqrt5+2},\ b=\sqrt[3]{\sqrt5-2}$

$(A)^3=\sqrt5+2-3\sqrt[3]{\sqrt5+2}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}+3\sqrt[3]{\sqrt5-2}\cdot\sqrt[3]{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}-\sqrt5+2=$

$=4-3\sqrt[3]{\sqrt5+2}\cdot1+3\sqrt[3]{\sqrt5-2}\cdot1$, т.к. $\sqrt[3]{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}=\sqrt[3]{5-4}=\sqrt[3]{1}=1$

$A^3=4-3(\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}}_{A})=4-3A$

$A^3+3A=4-3A+3A=4$ ✓

Ответ: 4

9. $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4}\\ tgx+tgy=\sqrt3(\sqrt3-2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4}\\ tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\cos x\cos y}=\frac{\sqrt3(\sqrt3-2)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}=\sqrt3(\sqrt3-2)\end{cases}$

$\left\{\cos x\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}\right.$

$\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}}=\sqrt3(\sqrt3-2)$

$\frac{\sqrt2}{\frac{\sqrt2}{2}+\cos(x-y)}=\sqrt3(\sqrt3-2)$ ✓

$\sqrt2=(3-2\sqrt3)(\frac{\sqrt2}{2}+\cos(x-y))$

$\frac{\sqrt2}{3-2\sqrt3}-\frac{\sqrt2}{2}=\cos(x-y)$ ✓

$\frac{2\sqrt2-3\sqrt2+2\sqrt6}{2\cdot(3-2\sqrt3)}=\cos(x-y)=\frac{\sqrt2(2\sqrt3-1)}{2(3-2\sqrt3)}$

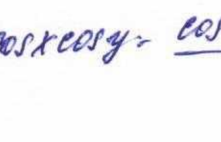
$\frac{2\sqrt6-\sqrt2}{2\cdot(3-2\sqrt3)}=\cos(x-y)=4\sqrt6-9\sqrt2=\frac{(2\sqrt6-\sqrt2)(3+2\sqrt3)}{2\cdot(9-12)}=-\frac{\sqrt2(12-3-4\sqrt3)}{6}=-\frac{\sqrt2\cdot(9-4\sqrt3)}{6}$

$\cos(x-y)<0$ / (т.к. $2\sqrt6-\sqrt2>0$, т.к. $24>2$, а $3-2\sqrt3<0$, т.к. $9<12$) $\Rightarrow$

$\begin{cases}|x-y|>\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ |x-y|<\frac{3\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ $x>y+\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$\exists\ x>y$ не умаляя общн.

$x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k+y$



$x+y=\frac{\pi}{4}$

Если подставим меньшее x в $x+y=\frac{\pi}{4}$, то знак изменится на „меньше":

$2y+\frac{\pi}{2}+2\pi k<\frac{\pi}{4}$

$2y<-\frac{\pi}{4}-2\pi k$

Если подставим большее x в $x+y=\frac{\pi}{4}$, то знак изменится на „больше"

$2y+2\pi k+\frac{3\pi}{2}>\frac{\pi}{4}$

$2y>-\frac{5\pi}{4}-2\pi k$

Проверим, меньше ли 1 $\cos(x-y)$ по модулю.

ШИФР 13782

7. Если эти числа образуют арифм. прогрессию, то разности между их попарные (посл. чл. прогр.) равны (т.к. они равны разности прогрессии)

ОДЗ: $2^x - 1 > 0$

$x > 0$

1) $\exists$ $\lg 2$ — первый член прогрессии, $\lg(2^x-1)$ — второй, $\lg(2^x+1)$ — третий

тогда $\lg(2^x-1) - \lg 2 = \lg(2^x+1) - \lg(2^x-1)$

$$\lg\left(\frac{2^x-1}{2}\right) = \lg\left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right)$$

$$\frac{2^x-1}{2} = \frac{2^x+1}{2^x-1}$$

$\exists$ $2^x = t$, $t > 0$

$$(t-1)^2 = 2(t+1)$$

$$t^2 - 2t + 1 - 2t - 2 = 0$$

$$t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 1 = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{1}$$

$\left[\begin{array}{l} t = 2+\sqrt{5} \\ t = 2-\sqrt{5} \text{ — не удовл. } t<0 \end{array}\right.$

$$2^x = 2+\sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2+\sqrt{5})$$

$2^x - 1 < 2^x + 1 \Rightarrow \lg(2^x-1) < \lg(2^x+1)$, т.е. в прогрессии эти числа идут в порядке $\lg(2^x-1)$ сна[чала] и $\lg(2^x+1)$ затем если $d>0$, е[сли] $d<0$, то наоборот.

4) $\exists$ $\lg 2$ — перв. чл., $\lg(2^x+1)$ — вто., $\lg(2^x-1)$ [...]

тогда $\lg\left(\frac{2^x+1}{2}\right) = \lg\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)$

$$(2^x+1)^2 = 2(2^x-1)$$

по п. 3) это ур-е не имеет решени[й]

5) $\exists$ $\lg(2^x+1)$ — первый, $\lg(2)$ — второй, $\lg(2^x-1)$ [...] чл. прогр., тогда

$$\lg\left(\frac{2}{2^x+1}\right) = \lg\left(\frac{2^x-1}{2}\right)$$

$$4 = 4^x - 1$$

$$x = \log_4 5$$

6) $\exists$ $\lg(2^x+1)$ — первый, $\lg(2^x-1)$ — второй, $\lg$ [...] третий чл. прогр., тогда

$$\lg\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right) = \lg\left(\frac{2}{2^x-1}\right)$$

$$(2^x-1)^2 = 2(2^x+1)$$

$$x = \log_2(2+\sqrt{5})$$

На самом деле сл. 4,5,6 это те [же] сл. 1,2,3, только перевернутые. Понят[но,] что получаются те же разност[и]

2) $\exists$ $\lg(2^x-1)$ — первый член прогрессии, $\lg 2$ — второй, $\lg(2^x+1)$ — третий.

$$\lg 2 - \lg(2^x-1) = \lg(2^x+1) - \lg 2$$

$$\lg\left(\frac{2}{2^x-1}\right) = \lg\left(\frac{2^x+1}{2}\right)$$

$$\frac{2}{2^x-1} = \frac{2^x+1}{2}$$

$$4 = 4^x - 1$$

$$4^x = 5$$

$$x = \log_4 5$$

3) $\exists$ $\lg(2^x-1)$ — первый член прогрессии, $\lg(2^x+1)$ — второй, $\lg 2$ — третий.

$$\lg\left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right) = \lg\left(\frac{2}{2^x+1}\right)$$

$\exists$ $2^x = t$, $t > 0$

$$(2^x+1)^2 = 2(2^x-1)$$

$$t^2 + 2t + 1 + 2 - 2t = 0$$

$$t^2 + 3 = 0 \text{ не имеет действ. корней.}$$

Мною разобраны все вариан[ты] и получены все x, когда эти числа [образуют] посл. чл. а[рифм. прогрессии]