



Класс 11 Вариант 8 Дата Олимпиады 11.02.17

Площадка написания МГТУ им. БАУМАНА

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	0	75	семьдесят пять	

№1) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2) = 5$

Пусть $x^2 - 2x = t$, тогда

$$(t+2)(t-2) = 5$$

$$t^2 - 4 = 5$$

$$t^2 = 9$$

$$\begin{cases} t=3 \\ t=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$

По теореме Виета:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

2) $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\frac{D}{4} = 1 - 3 = -2 \quad \frac{D}{4} < 0 \Rightarrow \text{корней нет}$$

3) Объединим решения

$$\begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ответ: -1; 3 ✓

№7) $S = 36$

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 5$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow$$

$$36 = \frac{4+5}{2} \cdot n$$

$$n = \frac{72}{4+5} = \frac{72}{9}$$

$$n = 8$$

Ответ: 8 ✓

n - кол-во членов прогрессии



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

2464

$$12) \sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3} = 4$$

$$OD3: \begin{cases} 3x-3 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3, \text{ тогда}$$

$$(\sqrt{3x-3} - \sqrt{x-3})^2 = 4^2$$

$$16 = 3x-3 + x-3 - 2\sqrt{(3x-3)(x-3)}$$

$$22-4x = -2\sqrt{(3x-3)(x-3)} \quad | :2$$

$$11-2x = -\sqrt{(3x-3)(x-3)}$$

$$2x-11 = \sqrt{(3x-3)(x-3)}$$

$$(2x-11)^2 = (\sqrt{(3x-3)(x-3)})^2$$

$$4x^2 - 44x + 121 = 3x^2 - 3x - 9x + 9$$

$$x^2 - 44x + 121 - 9 = 0$$

$$x^2 - 32x + 112 = 0$$

По теореме Виета

$$\begin{cases} x=4 & \text{не удовн } x > 4,5 \\ x=28 \end{cases}$$

Ответ: 28 ✓

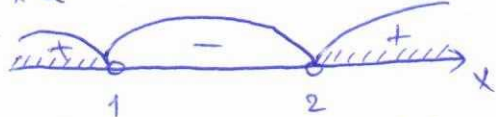
$$13) \frac{-x^3 + 2x^2 + x - 1}{2-x} < x^2$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 1}{x-2} < x^2$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 1 - x^2(x-2)}{x-2} < 0$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 1 - x^3 + 2x^2}{x-2} < 0 \quad | \cdot x(-1)$$

$$\frac{x-1}{x-2} > 0$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ ✓

$$14) \lg(3x-1) - \frac{1}{2} \lg(x+1) = \frac{1}{2} \lg(x+13)$$

$$\lg(3x-1) = \frac{1}{2} (\lg(x+1) + \lg(x+13))$$

$$OD3: \begin{cases} 3x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+13 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > -1 \\ x > -13 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$2 \cdot \lg(3x-1) = \lg(x+1) + \lg(x+13)$$

$$\lg(3x-1)^2 = \lg((x+1)(x+13)) \Rightarrow$$

$$(3x-1)^2 = (x+1)(x+13)$$

$$9x^2 - 6x + 1 = x^2 + x + 13x + 13$$

$$8x^2 - 20x - 12 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \text{ не удов. } DD3$$

Ответ: 3. ✓

$$15. \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-8x+14}$$

п.к. $\frac{1}{3} < 1$, то

$$2x+2 < 2x^2-8x+14$$

$$2x^2-10x+12 > 0$$

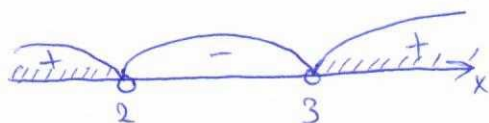
$$x^2-5x+6 > 0$$

$$1) x^2-5x+6=0$$

по теореме Виета:

$$\begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow (x-3)(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$(x-3)(x-2) > 0$$



$$\begin{cases} x < 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ ✓

16)

А - 2кз меди + 4кз свинца

Б - 3кз меди + 5кз свинца

Пусть x - кол-во гвиз. А, а

y - кол-во гвиз. Б, тогда

$$\begin{cases} 2x+3y=146 & \cdot (-2) \text{ - медь} \\ 4x+5y=258 & \text{ - свинец} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x-6y=-292 \\ 4x+5y=258 \end{cases}$$

$$-y = -292 + 258$$

$$y = 34 \Rightarrow$$

$$2x + 34 \cdot 3 = 146$$

$$2x = 44$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

34 гвиз. Б

22 гвиз. А

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

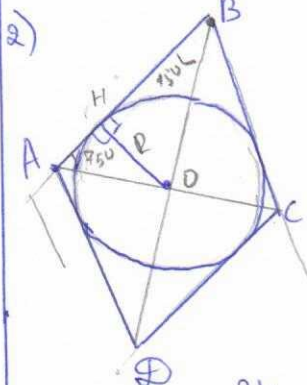
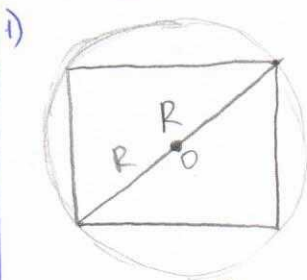
$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

$$x = 22$$

Страна впис. в
окружность квадрата
равна $R\sqrt{2} \Rightarrow$
 $S_{\text{кв}} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$



$$\angle A = 150^\circ = \angle C \Rightarrow \angle B = \angle D = 30^\circ \Rightarrow$$

$\angle BAO = 75^\circ$, а $\angle HBO = 15^\circ$ по
теореме об отрез. кас. провед

$$\text{из 1 точки, тогда}$$

$$\frac{R}{BO} = \sin 15^\circ \Rightarrow BO = \frac{R}{\sin 15^\circ} \Rightarrow$$

$$BD = \frac{2R}{\sin 15^\circ} \text{ (из } \triangle OMB)$$

$$AO = \frac{R}{\sin 75^\circ} = \frac{R}{\cos 15^\circ} \Rightarrow$$

$$\angle A = 150^\circ$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$a) \cos 30^\circ = 1 - 2 \cdot \sin^2 15^\circ$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$a) \cos 30^\circ = 1 - 2 \cdot \sin^2 15^\circ$$

$$b) \cos 30^\circ = 2 \cdot \cos^2 15^\circ - 1$$

$$S_P = \frac{1}{4} \cdot \frac{2R \cdot 2}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{2R \cdot 2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 2R^2}{\sqrt{4}-3} = \frac{8R^2}{1} \Rightarrow$$

$$3) \frac{S_P}{S_{\text{кв}}} = \frac{48R^2}{2R^2} = 4$$

Ответ: 4. ✓

ШИФР

2464.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x+y = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - y$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right) + \cos y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos y - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin y + \cos y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos y + \frac{1}{2} \sin y + \cos y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cos y + \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Пусть $\tan \frac{y}{2} = t$, тогда $\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin y = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot (1+t^2)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)(1-t^2) + t = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+t^2)$$

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 - t^2 + t = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

$$1+t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)t^2 = \frac{1}{2} + t^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$t^2(1.5 + \sqrt{3}) - t - 0.5 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 0.5 \cdot (1.5 + \sqrt{3}) = 1 + 2(1.5 + \sqrt{3}) = 1 + 3 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}}$$

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos y = \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{9 + 12\sqrt{3} + 12}}{1 + \frac{1 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{9 + 12\sqrt{3} + 12}} =$$

$$= \frac{16 + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{26 + 14\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \arccos\left(\frac{16 + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{26 + 14\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right) \\ x = \frac{2\pi}{3} - \arccos\left(\frac{16 + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{26 + 14\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right) \\ x = \frac{2\pi}{3} - \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right) \end{cases}$$

$$t_2 = \frac{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\cos y = \frac{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{3 + 2\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$\frac{21 + 12\sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - 4 - 2\sqrt{3}}{21 + 12\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{16 + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{26 + 14\sqrt{3} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{8 + 5\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} \Rightarrow$$

$$y = \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right)$$

$$x = \frac{2\pi}{3} - \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{2\pi}{3} - \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right), \arccos\left(\frac{8 + 5\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{13 + 7\sqrt{3} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}\right)\right)$
 10 упростить!

N/D.

$$\sqrt{1573} = 11\sqrt{13}$$

$$\sqrt[3]{40 + 11\sqrt{13}} + \sqrt[3]{40 - 11\sqrt{13}}$$

Пусть $a = \sqrt[3]{40 + 11\sqrt{13}}$, $b = \sqrt[3]{40 - 11\sqrt{13}}$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a =$$

$$= 40 + 11\sqrt{13} + 40 - 11\sqrt{13} + 3\sqrt{(40^2 - (11\sqrt{13})^2)} +$$

$$+ 3\sqrt{(40^2 - (11\sqrt{13})^2)} \cdot (40 + 11\sqrt{13}) + \sqrt[3]{(40^3 - (11\sqrt{13})^3) \cdot (40 - 11\sqrt{13})}$$

$$= 80 + 3\sqrt{80 \cdot (40^2 - 121 \cdot 13)} = 80 + 3\sqrt{80 \cdot 27} =$$

$$= 80 + 9\sqrt{80} \quad ?$$