



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

4749

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	4	5	5	5	10	10	5	15	—	20	79	семьдесят девять	

8] Дано: 3 попарно касающиеся друг друга окр;
центры окр лежат в вершинах прямоугол. Δ

$R_{\text{наиб}} = 6 \text{ см}$ $R_{\text{ср}} = 4 \text{ см}$

Найти: $R_{\text{наим}}$ — ?

Решение:

$AO = AK = 4 \text{ см}$ — радиусы средней окр

$OB = BH = 6 \text{ см}$ — радиусы наиб окр

$KC = CH$ — радиусы наим окр.

Пусть $KC = CH = x$, тогда по теореме
Пифагора составим и решим ур-ие:

$$AB^2 = (AK + x)^2 + (BH + x)^2 \Rightarrow AB = AO + OB = 4 + 6 = 10 \text{ см} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^2 = (4 + x)^2 + (6 + x)^2 \quad \checkmark \quad x^2 + 10x - 24 = 0 \quad \checkmark$$

$$10^2 = 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2$$

$$100 = 2x^2 + 20x + 52 \quad | :2$$

$$50 = x^2 + 10x + 26$$

По теореме, обратной
теореме Виета получим:
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -10 \\ x_1 \cdot x_2 = -24 \end{cases}$ где x_1 и x_2 — корни
ур-ия

$$x_1 = -12 \quad \checkmark \quad x = 2$$

не уга
задача

$$x = 2 = KC = CH = R_{\text{наим}}$$

Ответ: $R_{\text{наим}} = 2 \text{ см}$ $\checkmark$



4) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$; $0 < x < 3$; $x > 0$

$$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad | \times \frac{6}{11}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Ответ: $x = \sqrt{3}$

5) $8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$
 $8 \cdot 2^{2x} + 1 - 6 \cdot 2^x \leq 0$

Пусть $2^x = t$, тогда

$$8t^2 - 6t + 1 \leq 0$$

Вспользуемся

методом интервалов:

$$8t^2 - 6t + 1 \geq 0$$

$$D = 36 - 4 \cdot 8 \cdot 1 = 4 \Rightarrow \text{у-е}$$

имеет 2 корня:

$$t_1 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4} \quad t_2 = \frac{6+2}{16} = \frac{1}{2}$$



$$t \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$$

Вернёмся к замене:

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1}$$

$$-2 \leq x \leq -1$$

$$x \in [-2; -1]$$

Ответ: $x \in [-2; -1]$

6) Пусть кол-ва кошек сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород равны числам a, b, c и d соответственно, тогда по условию:

$$d \geq 2b; c \geq 1,5d; a \geq c - 13;$$

$$a + b + c + d = 77. \text{ Выразим числа } a, c, d \text{ через } b \text{ и подставим в у-е } a + b + c + d = 77; d \geq 2b; c \geq 1,5d \geq 1,5 \cdot 2b \geq 3b$$

$$a \geq c - 13 \geq 3b - 13 \Rightarrow 3b - 13 + b + 3b + 2b \geq 77$$

$$9b - 13 \geq 77 \Rightarrow b \geq 10 \Rightarrow d \geq 2 \cdot 10 \geq 20$$

$$9b \geq 90 \Rightarrow b \geq 10 \Rightarrow c \geq 1,5 \cdot 20 \geq 30$$

Ответ: кол-ва кошек сибирской, ангорской, персидской и сиамской пород равны 10, 20, 30 и 27 соответственно



$$1) (x-1)(x-3)(x-5) \geq x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) \geq x(x-3)(x+3) \quad /: (x-3)$$

$$(x-1)(x-5) \geq x(x+3)$$

$$x^2 - 5x - x + 5 \geq x^2 + 3x$$

$$x^2 - 6x + 5 - x^2 - 3x \geq 0$$

$$9x \geq 5$$

$$x \geq \frac{5}{9}$$

Ответ: $x \geq \frac{5}{9}$ 3-!

$$2) \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} \geq 2; \quad \text{Т.к. } \sqrt{x-1} \geq 0, \text{ то}$$

$\& \text{ ОДЗ: } x \geq 1$ ✓ При $x > 1$ $\sqrt{3x+1} > \sqrt{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3x+1} > 2 \Rightarrow$ При $x > 1$ равенство

$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} \geq 2$ выполняться не будет

При $x \geq 1$ равенство выполняется:

$\sqrt{1-1} + \sqrt{3 \cdot 1 + 1} \geq 2 \quad 0 + 2 \geq 2$ — верно $\Rightarrow$

$x \geq 1$

Ответ: $x \geq 1$ ✓

$$3) \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}; \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

Воспользуемся методом интервалов: $\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0$

$$1-x \geq 0$$

$$x \leq 1$$

$$\frac{(x+1)(x+2) \neq 0}{x+1 \neq 0 \text{ или } x+2 \neq 0}$$

$$x \neq -1 \quad x \neq -2$$

Промежутки знакопостоянства:



С учётом ОДЗ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

4749

$$10) A^3 + 3A ; A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= \sqrt{5} + 2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - \\ &- \sqrt{5} + 2 = 4 - 3\sqrt[3]{5\sqrt{5}+20+4\sqrt{5}-10-8\sqrt{5}-8} + \\ &+ 3\sqrt[3]{5\sqrt{5}-20+4\sqrt{5}+10-8\sqrt{5}+8} = 4 + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \\ 3A &= 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\ A^3 + 3A &= 4 + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A^3 + 3A = 4 \quad \checkmark$$

$$7) \lg 2 = \frac{\lg(2^x-1) + \lg(2^x+1)}{2}$$

$$\lg 2 = \frac{1}{2} \lg((2^x-1)(2^x+1))$$

$$\lg 2 = \frac{1}{2} \lg(4^x - 1)$$

$$\lg 2 = \lg \sqrt{4^x - 1}$$

$$2 = \sqrt{4^x - 1}$$

$$4 = 4^x - 1$$

$$5 = 4^x$$

$$x = \log_4 5$$

см. уст.

5