ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 703

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	5	–	20	75	семьдесят пять	

N1

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

Решение:

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0$

$(x-3)((x-1)(x-5)-x(x+3))=0$

или $x-3=0$, $x=3$ или $(x-1)(x-5)-x(x+3)=0$

$x^2-x-5x+5-x^2-3x=0$

$5-9x=0$

$9x=5$

$x=\frac{5}{9}$

Ответ: $\frac{5}{9}$; 3.

N2

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$

ОДЗ: 1) $x-1\geq 0$, $x\geq 1$ 2) $3x+1\geq 0$, $3x\geq -1$, $x\geq -\frac{1}{3}$

(1) и (2) $\Rightarrow$ $x\geq 1$

Решение

$2>0$

$4=(\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1})^2$

$4=(x-1)+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}+(3x+1)$

$4=4x+2\sqrt{3x^2-2x-1}$

$4-4x=2\sqrt{3x^2-2x-1}$

Для того, чтобы возвести обе части выражения в квадрат, мы должны убедиться, что они положительны, поэтому должны выполняться следующие неравенства:

1) $4-4x\geq 0$

$4(1-x)\geq 0$

$1-x\geq 0$

$1\geq x$

2) $3x^2-2x-1\geq 0$

$D=4+12=16$

$x=\frac{2\pm 4}{6}$

$x_1=1$

$x_2=-\frac{1}{3}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ГАЗПРОМ
$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

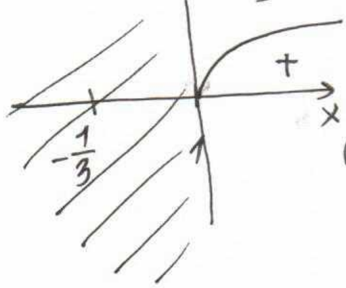
ШИФР 703

№2

1) $x \leq 1$

2) $x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{3}$



(с учётом О

$x \geq 1$

из (1) и (2) $\Rightarrow$ $x \leq 1$ и $x \geq 1$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x = 1$

Проверка: $\sqrt{1-1} + \sqrt{3+1} = 2$

$0 + \sqrt{4} = 2$

$2 = 2$ - верно

Ответ: 1.

№6 Решение: Пусть сибирских – x
Амурских – y
Персидских – z
Сиамских – a), тогда из ус

Из задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a = 2y & (1) \\ z = 1{,}5a & (2) \\ z = x + 13 & (3) \\ a + x + y + z + \cancel{8} = 77 & (4) \end{cases}$$

Решение системы:

(1): $2y = a$ (2): $z = 1{,}5a$

$y = \frac{a}{2}$

(3): $z = x + 13$

$x = z - 13$

т.к. $z = 1{,}5a$, то

$x = 1{,}5a - 14$

Из (1);(2);(3), $\Rightarrow$

(4): $a + x + y + z = 77$

$1{,}5a - 13 + 0{,}5a + 1{,}5a + a = 77$

$a + 3{,}5a - 13 = 77$

$4{,}5a = 90$, $\Rightarrow$ $a = 20$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Газпром

$(ab)c = a(bc)$ $E = mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 703

$z = 1{,}5a = 30$ $y = \frac{a}{2} = 10$

$x = 1{,}5a \cancel{z} - 13 = 30 - 13 = 17$

Ответ: На выставке было 17 сибирских, 10 а
горских, 30 персидских и 20 сиамских к

№3 $\frac{2}{x+1} \geqslant \frac{3}{x+2}$

Решение:

$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geqslant 0$

$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$

$\frac{(1-x)}{(x+1)(x+2)} \geqslant 0$

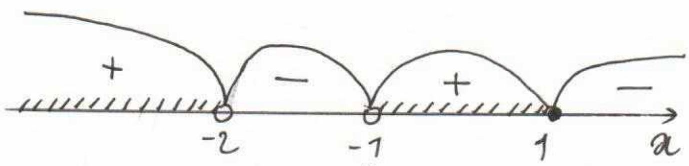
Нули числителя: $1 - x = 0$

$x = 1$

Нули знаменателя: $(x+1)(x+2) = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = -2$



$(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$.

№4 $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12}$

Решение: ОДЗ: $x > 0$

$\log_3 x + \log_{3^2} x + \log_{3^3} x = \frac{11}{12}$

$1 \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$

$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12}$

$\log_3 x = \frac{\cancel{11} \cdot 6}{12 \cdot \cancel{11}} = \frac{1}{2}$

$3^{\frac{1}{2}} = x$ $x = \sqrt{3} \in ОДЗ$ Ответ: $\sqrt{3}$.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 703

№5

$8\cdot 4^x+1\le 6\cdot 2^x$ ОДЗ: $2^x>0$

Решение:

$8\cdot 2^{2x}-6 2^x+1\le 0$

$D=36-32=4=2^2$

$2^x=\frac{6\pm 2}{16}$

1) $2^x=\frac{1}{2}$

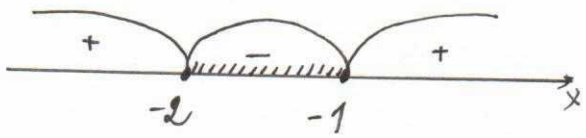
$2^x=+2^{-1}$

$x=-1$

2) $2^x=\frac{1}{4}$

$2^x=2^{-2}$

$x=-2$



$[-2;-1]$

Ответ: $[-2;-1]$.

№10 $A^3+3A=A(A^2+3)$

Решение:

$\left(3+\left(\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}\right)^2\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5+2}\right)$

(1): $3+\left(\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}\right)^2=3+(\sqrt5+2)^{\frac23}-$

$-2\sqrt[3]{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}+(\sqrt5-2)^{\frac23}=3+(\sqrt5+2)^{\frac23}+(\sqrt5-2)^{\frac23}-2\sqrt[3]{1}=$

$=1+(\sqrt5+2)^{\frac23}+(\sqrt5-2)^{\frac23}$

$\left(1+(\sqrt5+2)^{\frac23}+(\sqrt5-2)^{\frac23}\right)\left((\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)=$

$=(\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5-2)^{\frac13}+(\sqrt5+2)^{\frac23}(\sqrt5+2)^{\frac13}-(\sqrt5+2)^{\frac23}(\sqrt5-2)^{\frac13}\neq$

$\neq+(\sqrt5-2)^{\frac23}(\sqrt5+2)^{\frac13}+\left(-(\sqrt5-2)^{\frac23}(\sqrt5-2)^{\frac13}\right)=\underline{(\sqrt5+2)^{\frac13}}-\underline{(\sqrt5-2)^{\frac13}}+$

$+(\sqrt5+2)^{\frac33}\cdot 1-\underline{1\cdot(\sqrt5+2)^{\frac13}}+\underline{1\cdot(\sqrt5-2)^{\frac13}}-(\sqrt5-2)=$

$=\sqrt5+2-\sqrt5+2=4$

Ответ: 4;

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 703

№7

$$\begin{cases} \log_{20} 2 + n = \lg(2^x-1) \\ \lg(2^x-1)+n = \lg(2^x+1) \end{cases}$$

$$\lg 2 - \lg(2^x-1) = \lg(2^x-1) - \lg(2^x+1)$$

$$\lg 2 = 2\lg(2^x-1) - \lg(2^x+1)$$

$$\lg 2 = \lg(2^x-1)^2 - \lg(2^x+1)$$

$$\lg 2 = \lg\frac{(2^x-1)^2}{2^x+1}$$

$$2 = \frac{(2^x-1)^2}{2^x+1}$$

$$\frac{(2^x-1)^2-2(2^x+1)}{2^x+1}=0, \Rightarrow$$

ОДЗ: $2^x>0$

$$(2^x-1)^2-2\cdot 2^x-2=0$$

$$2^{2x}-2\cdot 2^x+1-2\cdot 2^x-2=0$$

$$2^{2x}-4\cdot 2^x-1=0$$

$$D = 16+4=20=4\cdot 5=2^2\cdot 5$$

$$2^x = \frac{4\pm 2\sqrt5}{2} = 2\pm\sqrt5$$

1) $2^x = 2-\sqrt5 \notin$ ОДЗ

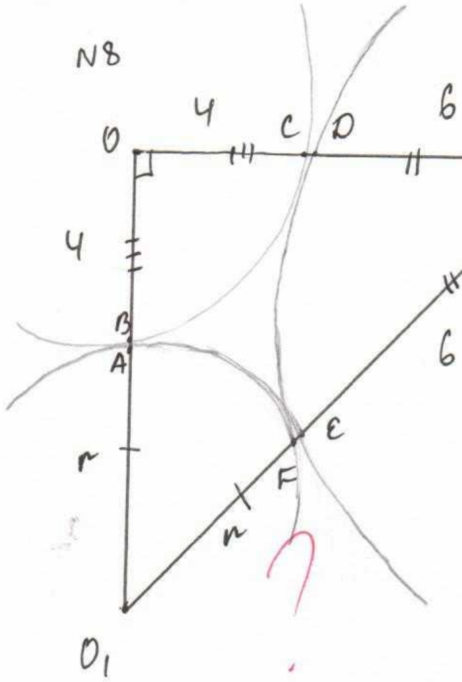
2) $2^x = 2+\sqrt5$

$x = \log_2(2+\sqrt5)$

Ответ: $\log_2(2+\sqrt5)$

ШИФР 703

N8



Решение:

Т.к. $\triangle O_1OO_2$ - прямоугольный, то

$$OO_1^2 + OO_2^2 = O_1O_2^2$$

$$(4+x+r)^2 + (4+x+6)^2 = (6+x+r)^2$$

$$(10+x)^2 = (6+x+r)^2 - (4+x+r)^2, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = 5$$

Ответ: 5;