

ШИФР 1841

Класс 11 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	8	10	10	15	15	20	92	двести два	

ЗАДАЧА 1

$$\begin{aligned}
 (x-1)(x-3)(x-5) &= x(x-3)(x+3) \\
 (x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) &= 0 \\
 (x-3)(x^2 - x - 5x + 5 - x^2 - 3x) &= 0 \\
 (x-3)(5-9x) &= 0 \\
 \begin{cases} x-3=0 \\ 5-9x=0 \end{cases} &\quad \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $3; \frac{5}{9}$ ✓

ЗАДАЧА 2

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} &= 2 \\
 x-1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{3x+1} + 3x+1 &= 4 \\
 2\sqrt{x-1}\sqrt{3x+1} + 4x-4 &= 0 \\
 2\sqrt{x-1}\sqrt{3x+1} + 4(x-1) &= 0 \\
 2\sqrt{x-1}(\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x-1}) &= 0 \\
 \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x-1} = 0 \end{cases} &\quad x=1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\boxed{x \geq 1}$

Ответ: 1

ЗАДАЧА 3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)}{(x+1)(x+2)} \leq 0$$



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

1841

ЗАДАЧА 4

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad | \cdot 12$$

$$12 \log_3 x + 6 \log_3 x + 4 \log_3 x = 11$$

$$22 \log_3 x = 11$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{3}$$

Ответ: $\sqrt{3}$

ЗАДАЧА 5

$$8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$$



$$2^x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\begin{cases} 2^x \geq \frac{1}{4} \\ 2^x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Ответ: $[-1; -2]$

ЗАДАЧА 6

Сибирские - $(3x-13)$ номен

Ангорские - пусть их x номен

Персидские - $3x$ номен

Самские - $2x$ номен

$$3x - 13 + x + 3x + 2x = 77$$

$$9x = 90$$

$$x = 10$$

Ангорских - 10 номен

Персидских - 30 номен

Самских - 20 номен

Сибирских - $(30-13) = 17$ номен

Ответ: сибирских - 17 ном; ангорских - 10 ном.; персидских - 30 ном.; самских - 20 ном.

$$8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 8 = 1$$

$$2^x = \frac{3 \pm 1}{8}$$

$$\begin{cases} 2^x = \frac{1}{2} \\ 2^x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ШИФР 1841

ЗАДАЧА 7

$\lg 2, \lg(2^x - 1), \lg(2^x + 1)$ - арифметическая прогрессия, каждый следующий член отличается от предыдущего на определенное число d - разность арифметической прогрессии

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = d$$

$$\lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1) = d$$

$$\lg(2^x - 1) - \lg 2 = \lg(2^x + 1) - \lg(2^x - 1) \quad \checkmark$$

$$\lg(2^x - 1) + \lg(2^x - 1) = \lg(2^x + 1) + \lg 2$$

$$\lg(2^x - 1)^2 = \lg(2^x + 1) \cdot 2$$

$$(2^x - 1)^2 = 2(2^x + 1) \quad \checkmark$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 2$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 1 = 5$$

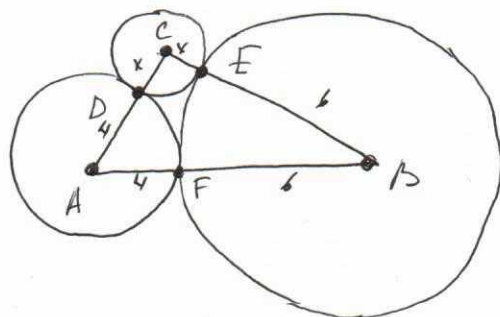
$$2^x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5} \quad \checkmark$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5}) \quad \checkmark$$

Ответ: при $x = \log_2(2 + \sqrt{5})$

ЗАДАЧА 8



Дано:
 $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$,
 $R_B = 6 \text{ см}$
 $R_F = 4 \text{ см}$
 $R_m = ?$

Решение: $\checkmark$
 1. $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ \Rightarrow AB$ - гипотенуза.

$AB > AC$ и $AB > CB$, значит центр большего

окружности с меньшим радиусом в точке C (вершине прямого угла). $CB > AC$ (по построению), значит центр среднего радиуса в точке B , а среднего - в точке A .

2. Пусть $CE = ED = x$ (где CD - меньший радиус); $EB = FB = R_B = 6 \text{ см}$; $AD = AF = 4 \text{ см}$

3. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad \checkmark$

$$100 = (4+x)^2 + (6+x)^2; 100 = 16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2; x^2 + 10x - 24 = 0$$

Ответ: меньший радиус 2 см

$x = 2$ (не подходит)
 $x = -13$ (т.к. радиусы положительные)

ШИФР

1841

ЗАДАЧА 10

$$\begin{aligned}
 A^3 &= (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 = \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + \\
 &+ 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5}-2 = 4 - 3\sqrt[3]{(9+4\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)} + 3\sqrt[3]{(9-4\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)} = \\
 &= 4 - 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}+20-18-8\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{9\sqrt{5}+18-20-8\sqrt{5}} = 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\
 3A &= 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} \\
 A^3 + 3A &= 4 - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} + 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 4
 \end{aligned}$$

Ответ: $A^3 + 3A = 4$ ✓

ЗАДАЧА 9

$$x + y = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{4} - y \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - y) + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3} \quad (2)$$

Решим согласно 2 уравнение:

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - y) + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} y} + \operatorname{tg} y = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$1 - \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y - 3 + 2\sqrt{3} - 3\operatorname{tg} y + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} y = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg} y (3 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg} y = \frac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{(2\sqrt{3} - 2)^2 - 4(2\sqrt{3} - 2)}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} y &= \frac{2\sqrt{3} - 2 \pm \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2} \\
 \operatorname{tg} x &= 3 - 2\sqrt{3} - \operatorname{tg} y = \frac{3 - 2\sqrt{3} \pm \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2} \\
 \operatorname{tg} y &= \frac{3 - 2\sqrt{3} - \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2} \\
 \operatorname{tg} x &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{29 - 20\sqrt{3}}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(x - y) &= \frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)} = \\
 &= \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \\
 &= \frac{\cos x \cos y (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)}{\cos x \cos y (1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg} y (3 - 2\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} - 2 &= 0 \quad \checkmark \\
 D &= 9 - 12\sqrt{3} + 12 - 8\sqrt{3} + 8 = 29 - 20\sqrt{3} \\
 D &< 0 \\
 \text{значит корней} &\text{нет}
 \end{aligned}$$

Ответ: таких (x, y) нет
(которые удовлетворяют
данной системе уравнений)