ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

Класс 11 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н.Э.Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ Цифрой	Σ Прописью	Подпись
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	15	10	10	85	восемьдесят пять	

N1

$$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$$
$$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0$$
$$(x-3)\big((x-1)(x-5)-x(x+3)\big)=0$$
$$(x-3)(x^2-6x+5-x^2-3x)=0$$
$$(x-3)(-9x+5)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ -9x+5=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{array}\right.$$

Проверим получившиеся корни:

① $x=3$

$2\cdot 0\cdot(-2)=3\cdot 0$

$0=0$ верно

② $x=\frac{5}{9}$

$-\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{22}{9}\right)\cdot\left(-\frac{40}{9}\right)=\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{704}{81}\right)$

$-\frac{3520}{729}=-\frac{3520}{729}$ верно

Ответ: $\frac{5}{9}$; 3.

N2

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$$
$$\begin{cases} x>1 \\ \sqrt{3x+1}=2-\sqrt{x-1} \quad (1) \end{cases}$$

~~(1) Возведем обе части в квадрат:~~

$\cancel{3x+1=2-4\sqrt{x-1}+(x-1)}$

$\cancel{3x+1=x+1-4\sqrt{x-1}}$

$\cancel{2x=-4\sqrt{x-1}}$

$\cancel{3x+1=4-4\sqrt{x-1}+(x-1)}$

$\cancel{3x+1=x+3-4\sqrt{x-1}}$

$\cancel{2x-2=-4\sqrt{x-1}}$

$\cancel{(1)\ \sqrt{x-1}=2-\sqrt{3x+1}}$

$\cancel{x-1=4-4\sqrt{3x+1}+3x+1}$

$\cancel{x-1=3x+5-4\sqrt{3x+1}}$

$\cancel{4\sqrt{3x+1}=2x+6}$

$\cancel{2\sqrt{3x+1}=x+3}$

$\cancel{2(3x+1)=x^2+6x+9}$

$\cancel{6x+2=x^2+6x+9}$

~~(1) возведем обе части в квадрат~~

$\cancel{x-1+2\sqrt{3x^2-2x-1}+3x+1=2}$

$\cancel{4x-2=-2\sqrt{3x^2-2x-1}}$

$\cancel{2x-1=-\sqrt{3x^2-2x-1}}$

$\cancel{4x^2-4x+1=3x^2-2x-1}$

$\cancel{x^2-2x}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

N2 (продолжение)

(1) Возведем обе части в квадрат:

$3x+1=4-4\sqrt{x-1}+(x-1)$

$3x+1=x+3-4\sqrt{x-1}$

$2x-2=-4\sqrt{x-1}$

$x-1=-2\sqrt{x-1}$

$x^2-2x+1=-2x+2$

$x^2=1$

$\begin{cases} x\geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=1$

Проверим:

$\sqrt{1-1}+\sqrt{3\cdot 1+1}=2$

$0+\sqrt{4}=2$

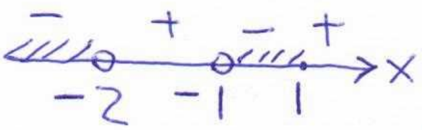
$2=2$ верно $\Rightarrow x=1$

Ответ: 1.

N3

$\frac{2}{x+1}\geqslant\frac{3}{x+2}$ $\quad \frac{3}{x+2}^{\backslash x+1}-\frac{2}{x+1}^{\backslash x+2}\leq 0$ $\quad \frac{3x+3-2x-4}{(x+2)(x+1)}\leq 0$

$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\leq 0$ $\quad$ $\Rightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(-1;1]$



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-1;1]$.

N4

$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{12}$

$\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x+\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{1}{3}\log_3 x=\frac{11}{12} \end{cases}$ (1)

(1) $\log_3 x^{\backslash 6}+\frac{\log_3 x}{2}^{\backslash 3}+\frac{\log_3 x}{3}^{\backslash 2}=\frac{11}{12}$

$\frac{6\log_3 x+3\log_3 x+2\log_3 x}{6}=\frac{11}{12}$

$\frac{11\log_3 x}{6}=\frac{11}{12}$

$\log_3 x=\frac{1}{2}$

$x=\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3}>0\Rightarrow$ верно

Ответ: $\sqrt{3}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

N5

$8\cdot 4^x+1\leq 6\cdot 2^x$

$8\cdot 2^{2x}-6\cdot 2^x+1\leq 0$

пусть $2^x=t$ $t>0$

$8\cdot t^2-6t+1\leq 0$

$D=36-32=4=2^2 \Rightarrow t\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

$\begin{cases} 2^x\leq \frac{1}{2} \\ 2^x\geq \frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x\leq 2^{-1} \\ 2^x\geq 2^{-2}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ x\geq -2\end{cases} \Rightarrow x\in[-2;-1]$

Ответ: $[-2;-1]$.

N6

Пусть x - кол-во Сиамских кошек. Составим для простоты таблицу

Порода	Кол-во
Сиамские	x
Ангорские	$\frac{x}{2}$
Персидские	$1{,}5x$
Сибирские	$1{,}5x-13$

$x+\frac{x}{2}+1{,}5x+1{,}5x-13=77$

$\frac{2x+x+3x+3x}{2}=90$

$9x=180$ $x=20.$

Отсюда получаем, что: Сиамских было 20, Ангорских - 10, Персидских - 30, Сибирских - 17. Проверим: $20+10+30+17=77$ верно.

Ответ: сиамские 20; ангорские 10; персидские 30; сибирские 17.

N7

$\lg 2$; $\lg(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)$

① $2^x-1>0$ $x>0$

Для того, чтобы 3 числа $a_1;a_2;a_3$ были членами арифметической последовательности, разность „a_2-a_1" должна быть равна „a_3- (Свойство любой арифметической" последовательности) ~~тогда~~

~~получаем~~ Существует 6 вариантов расстановки 3-х этих чисел:

① $\lg 2$; $\lg(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)$

② $\lg 2$; $\lg(2^x+1)$; $\lg(2^x-1)$

③ $\lg(2^x-1)$; $\lg(2)$; $\lg(2^x+1)$

④ $\lg(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)$; $\lg 2$

⑤ $\lg(2^x+1)$; $\lg 2$; $\lg(2^x-1)$

⑥ $\lg(2^x+1)$; $\lg(2^x-1)$; $\lg 2$

~~N37~~ N7 (продолжение)

⑤ $\lg 2-\lg(2^x+1)=\lg(2^x-1)-\lg 2$?

$\lg\left(\frac{2}{2^x+1}\right)=\lg\left(\frac{2^x-1}{2}\right)$ $t>0$

$\frac{2}{2^x+1}=\frac{2^x-1}{2}$ $\frac{2}{t+1}=\frac{t-1}{2}$ $4=t^2-1$

$t^2=5$

$\begin{cases} t>0 \\ \left[\begin{array}{l} t=\sqrt5 \\ t=-\sqrt5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t=\sqrt5$ $2^x=\sqrt5$ $x=\log_2\sqrt5$

⑥ $\lg(2^x-1)-\lg(2^x+1)=\lg 2-\lg(2^x-1)$

? $\lg\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)=\lg\left(\frac{2}{2^x-1}\right)$

$t>0$

$\frac{2^x-1}{2^x+1}=\frac{2}{2^x-1}$ $\frac{t-1}{t+1}=\frac{2}{t-1}$

$t^2-2t+1=2t+2$

$t^2-4t-1=0$

$D=16+4=20$ $\sqrt D=2\sqrt5$

$\begin{cases} t>0 \\ \left[\begin{array}{l} t=2-\sqrt5 \\ t=2+\sqrt5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t=2+\sqrt5$ $2^x=2+\sqrt5$

$x=\log_2(2+\sqrt5)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\left[\begin{array}{l} x=\log_2(2+\sqrt5) \\ x=\log_2\sqrt5 \end{array}\right.$ числа $\lg 2$; $\lg(2^x-1)$; $\lg(2^x+1)$ образуют арифметическую прогрессию (не обязательно в том порядке, в котором ~~представлены~~ записаны)

Ответ: $\log_2\sqrt5$; $\log_2(2+\sqrt5)$.

См. д/л.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

N7 (продолжение)

Разберем все случаи по указанному мной свойству:

(Не стоит забывать, что $\lg|a|-\lg|b|=\lg\left|\frac{a}{b}\right|$, где $a\neq0$, $b\neq0$)

① $\lg(2^x-1)-\lg 2=\lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)$

$\lg\frac{2^x-1}{2}=\lg\frac{2^x+1}{2^x-1} \Rightarrow \frac{2^x-1}{2}=\frac{2^x+1}{2^x-1}$ пусть $2^x=t$ $t>0$

$\frac{t-1}{2}=\frac{t+1}{t-1}$ $t^2-2t+1=2t+2$

$t^2-4t-1=0$ $D=16+4=20$ $\sqrt{D}=2\sqrt5$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=\frac{4-2\sqrt5}{2}\\ t=\frac{4+2\sqrt5}{2}\end{array}\right.\\ t>0\end{cases} \Rightarrow 2^x=2+\sqrt5$ $x=\log_2(2+\sqrt5)$

② $\lg(2^x+1)-\lg 2=\lg(2^x-1)-\lg(2^x+1)$

$\lg\left(\frac{2^x+1}{2}\right)=\lg\left(\frac{2^x-1}{2^x+1}\right)$ $t>0$

$\frac{2^x+1}{2}=\frac{2^x-1}{2^x+1}$ $\frac{t+1}{2}=\frac{t-1}{t+1}$ $t^2+2t+1=2t-2$

$t^2=-3$ $\varnothing$ такой арифм ~~последовательности~~ прогрессии не может быть

③ $\lg(2)-\lg(2^x-1)=\lg(2^x+1)-\lg(2)$

$\lg\left(\frac{2}{2^x-1}\right)=\lg\left(\frac{2^x+1}{2}\right)$

$\frac{2}{2^x-1}=\frac{2^x+1}{2}$ $\frac{2}{t-1}=\frac{t+1}{2}$ $4=t^2-1$

$t^2=5$

$\begin{cases}t>0\\ \left[\begin{array}{l}t=\sqrt5\\ t=-\sqrt5\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow t=\sqrt5$ $2^x=\sqrt5$ $x=\log_2\sqrt5$

④ $\lg(2^x+1)-\lg(2^x-1)=\lg2-\lg(2^x+1)$

$\lg\left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right)=\lg\left(\frac{2}{2^x+1}\right)$ $\frac{2^x+1}{2^x-1}=\frac{2}{2^x+1}$ $\frac{t+1}{t-1}=\frac{2}{t+1}$

$t>0$

$t^2+2t+1=2t-2$

$t^2=-3$ $\varnothing$ такой арифмет. ~~последово~~ прогрессии быть не может

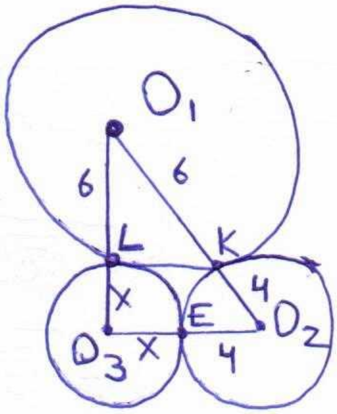
ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

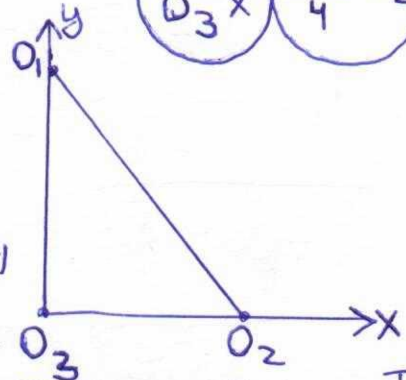
№8

1) Докажу, что точки касания всех окружностей лежат на сторонах прямоугольного треугольника:



Представим треугольник в виде системы координат:

тогда точки O_3 и O_2 имеют одну и ту же ординату, а точки O_1 и O_3 – абциссу $\Rightarrow$



Расстояние между точками O_3 и O_2 равно сумме R_3 и R_2, а расстояние между O_1 и O_3 – сумме $R_1 + R_3$ $\Rightarrow$ точки касания лежат на ~~вершинах~~ сторонах треугольника. То же самое ~~вер~~ будет и с точками O_1 и O_2, поскольку треугольник прямоугольный.

2) Вернемся к исходному чертежу и отметим точки касания окружностей.

Окружность с центром в точке O_3 – меньшая (у нее самый маленький радиус), т.к. она не лежит на гипотенузе. $\Rightarrow O_2K = 4 \; (O_2K = R_2)$

$O_1K = 6 \; (O_1K = R_1)$

3) Пусть ~~R₃~~ ~~R₃ радиус~~. $R_3 = x \; (O_3E = O_3L = x)$.

Тогда $O_1O_2 = 10 \quad O_2O_3 = (4+x) \quad O_1O_3 = (6+x)$

По теореме Пифагора:

$O_1O_2^2 = O_2O_3^2 + O_1O_3^2$

$100 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 12x + 36$

$100 = 2x^2 + 20x + 52$

$x^2 + 10x + 26 = 50$

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$(x+12)\cdot(x-2) = 0$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -12 \\ x = 2 \end{array} \right. \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow R_3 = 2$

Ответ: 2.

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

N10

$A^3+3A=A(A^2+3)$

$A^2=\sqrt[3]{(\sqrt5+2)^2}-2\sqrt[3]{(\sqrt5+2)(\sqrt5-2)}+\sqrt[3]{(\sqrt5-2)^2}=$

$=\sqrt[3]{9+4\sqrt5}-2+\sqrt[3]{9-4\sqrt5}$

$A^2+3=\sqrt[3]{9+4\sqrt5}+\sqrt[3]{9-4\sqrt5}+1$

$A(A^2+3)=\left(\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}\right)\left(\sqrt[3]{9+4\sqrt5}+\sqrt[3]{9-4\sqrt5}+\right.$

$=\sqrt[3]{9\sqrt5+20+18+8\sqrt5}+\sqrt[3]{9\sqrt5-20+18-8\sqrt5}+\sqrt[3]{\sqrt5+2}$

$-\sqrt[3]{9\sqrt5+20-18-8\sqrt5}-\sqrt[3]{9\sqrt5-20-18+8\sqrt5}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}$ =

$=\sqrt[3]{38+17\sqrt5}+\sqrt[3]{\sqrt5-2}+\sqrt[3]{\sqrt5+2}$

$-\sqrt[3]{\sqrt5+2}-\sqrt[3]{17\sqrt5-38}-\sqrt[3]{\sqrt5-2}=$

$=\sqrt[3]{38+17\sqrt5}-\sqrt[3]{17\sqrt5-38}$ Ответ: $\sqrt[3]{17\sqrt5+38}-\sqrt[3]{17\sqrt5-3}$

N9

$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \quad (1) \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\sqrt3(\sqrt3-2) \quad (2) \\ \cos x\neq0 \\ \cos y\neq0 \end{cases}$

(1) $x=\frac{\pi}{4}-y$

(2) $\frac{\sin(\frac{\pi}{4}-y)}{\cos(\frac{\pi}{4}-y)}+\frac{\sin y}{\cos y}=\sqrt3(\sqrt3-$

$\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos y-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin y}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos y+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin y}+\frac{\sin y}{\cos y}=\sqrt3(\sqrt3-2)$

$\frac{\cos y-\sin y}{\cos y+\sin y}+\frac{\sin y}{\cos y}=\sqrt3(\sqrt3-2)$ $\quad\frac{1}{\cos y(\cos y+\sin y)}=\sqrt3(\sqrt3-2$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 12991

№9 (продолжение)

$$\cos y(\cos y+\sin y)=\frac{1}{3-2\sqrt{3}}$$

(2) Преобразуем по-другому:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

$$\frac{\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \qquad \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos(\frac{\pi}{4}-y)\cdot\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

$$\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4}-y)\cdot\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2\cos(\frac{\pi}{4}-y)\cdot\cos y}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cdot\cos y=\frac{1}{3-2\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cdot\cos y=\cos y(\cos y+\sin y)$$

$$\cos y\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\cos y-\sin y\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos y=0\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos y+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin y\right)-\cos y-\sin y=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos y=0\\ \cos y+\sin y-\cos y-\sin y=0\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos y=0\\ 0=0\end{array}\right.\\ \cos y\neq0\end{array}\right. \Rightarrow \text{уравнение не имеет решений}$$

~~уравнение не имеет решений ... cos y~~

?

Ответ: нет решений.