



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Использовать только эту сторону листа,
обратная сторона не проверяется!

ШИФР

1788

Класс 11

Вариант 7

Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ имени Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	10	10	10	-	10	20	80	восемьдесят	

17

$$\lg 2 = a_1$$

$$\lg(2^x - 1) = a_2$$

$$\lg(2^x + 1) = a_3$$

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\lg(2^x - 1) = \frac{\lg 2 + \lg(2^x + 1)}{2}$$

$$\lg(2^x - 1) = \lg(2(2^x + 1))^{\frac{1}{2}}$$

$$2 \lg(2^x - 1) = \lg(2(2^x + 1))$$

$$\lg(2^x - 1)^2 = \lg(2(2^x + 1))$$

$$2(2^x + 1) = 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1$$

$$2^{x+1} + 2 = 2^{2x} - 2^{x+1} + 1$$

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 1 = 0$$

$$2^x = a; a > 0$$

$$a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 1 = 5$$

$$a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$a_1 = 2 + \sqrt{5}; a_2 = 2 - \sqrt{5}$$

исключаем,
т.к. $2 - \sqrt{5} < 0$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$$

Ответ: при

$$x = \log_2(2 + \sqrt{5}) \checkmark$$

ШИФР 1788

N10

$$A^3 + 3A = (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})^3 - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}) = \sqrt{5} + 2 - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{5} + 2 - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} = 4 - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{2}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{5}-2)^{\frac{2}{3}} - 3(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} + 3(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}$$

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} = x; (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} = y$$

$$4 - 3x^2y + 3xy^2 - 3x + 3y = 4 - 3x(xy+1) + 3y(xy+1) = 4 - 3(x(xy+1) + y(xy+1))$$

$$4 - 3((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}}((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2))^{\frac{1}{3}} + 1) + (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}}((\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2))^{\frac{1}{3}} + 1 = 4 - 3((\sqrt{5}+2)^{\frac{1}{3}} \cdot 1 + (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2) = 4 - 6(\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{3}} = 4$$

N9

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\cos x \cos y} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \cdot 2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos y \neq 0 \end{cases}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})}$$

$$\frac{\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})}$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x) = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}(3-2\sqrt{3})}$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-2\sqrt{3}}$$

N1

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x-3)(x+3)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) - x(x-3)(x+3) = 0$$

$$(x-3)((x-1)(x-5) - x(x+3)) = 0$$

$$(x-3)(x^2-6x+5-x^2-3x) = 0$$

$$(x-3)(5-9x) = 0$$

$$\begin{cases} x-3=0 \\ 5-9x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{5}{9}; 3$.

N2

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$$

$$(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1})^2 = 4$$

$$x-1 + 2\sqrt{(x-1)(3x+1)} + 3x+1 = 4$$

$$2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4 - 4x$$

$$2\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 4(1-x) \quad | :2$$

$$\sqrt{(x-1)(3x+1)} = 2(1-x)$$

$$(x-1)(3x+1) = 4(1-x)^2$$

$$3x^2+x-3x-1 = 4(1-2x+x^2)$$

$$3x^2+x-3x-1 = 4-8x+4x^2$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

Проверка: $x=1$
 $0+2=2$

$$x=5$$

$$2+4 \neq 2$$

Ответ: 1.

ШИФР 1788

№3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

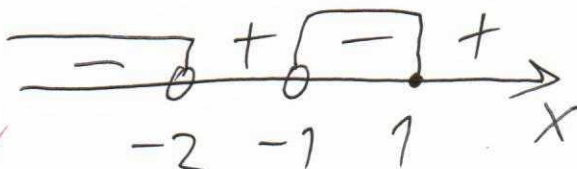
$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2) - 3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)} \leq 0 \quad \checkmark$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup [-1; 1]$$

$$\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12} \quad \checkmark$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{6} \log_3 x = \frac{11}{12} \quad | \cdot 6$$

$$11 \log_3 x = \frac{11}{2} \quad | : 11$$

$$\log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x = \log_3 \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{3} \quad \checkmark$$

N5

$$8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 \leq 0$$

$$2^x = a; a > 0$$

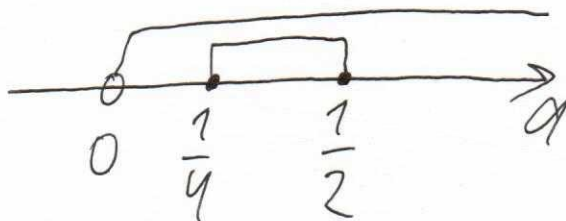
$$8a^2 - 6a + 1 \leq 0$$

$$8a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$a_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{8}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}; a_2 = \frac{1}{2}$$



$$\begin{cases} 2^x \leq \frac{1}{2} \\ 2^x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2 > 1 \nearrow$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } [-2; -1].$$

N6

x - кол-во сиамских
 y - кол-во ангорских
 z - кол-во персидских
 r - кол-во шотландских

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 1,5x \\ r = z - 13 \end{cases}$$

$$z = 1,5x$$

$$r = z - 13$$

$$x + y + z + r = 77$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \\ r = 3y - 13 \\ 2y + y + 3y + 3y - 13 = 77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \\ r = 3y - 13 \\ 9y = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ z = 30 \\ r = 17 \\ y = 10 \end{cases}$$

Ответ: 20 сиамских кошек, 30 ангорских кошек, 17 персидских кошек, 10 шотландских кошек.