

ШИФР 3250

Класс 10 Вариант 7 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	4	5	3	10	10	5	15	0	0	57	пятьдесят семь	

$$1. (x-1)(x-3)(x-5) = x(x^2-9)$$

$$(x-1)(x-3)(x-5) = x(x-3)(x+3)$$

$$0 = 0$$

тогда $x = 3; 5; 0$

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 3x^2 + 18x - 15 = x^3 + 3x^2 - 9x^2 - 9x^2 + 32x - 15 = 0$$

$$D = 256 - 135 = 121$$

$$x = \frac{-16 \pm 11}{-9} = 3; \frac{5}{9}$$

Ответ: $3; \frac{5}{9}$ ✓

$$2. \sqrt{x-1} + \sqrt{3x+1} = 2$$

$$\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{3x+1}$$

$$x-1 = 4 - 4\sqrt{3x+1} + 3x+1$$

$$\begin{cases} 4\sqrt{3x+1} = 6 + 2x \\ 6 + 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3x+1} = 3 + x \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4 = 9 + 6x + x^2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$OD3: \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (7; +\infty)$$

$$\textcircled{1} x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\sqrt{3x+1} = 2 - \sqrt{x-1}$$

$$3x+1 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x-1$$

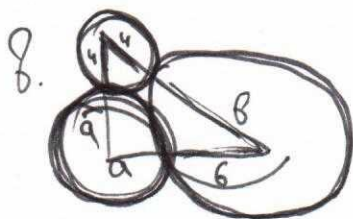
$$4\sqrt{x-1} = 2 - 2x$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} = 1-x \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = 5; 1$$

Ответ: $5; 1$ ✓



$$(a+4)^2 + (a+6)^2 = 100$$

по шифру проба 6, 8, 10

$$a = 2$$

$$(2+4)^2 + (2+6)^2 = 100 \quad \checkmark$$

$$36 + 64 = 100 \text{ - верно}$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad \checkmark$$

9.

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sqrt{3}(\sqrt{3}-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - y \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right) + \operatorname{tg} y = (\operatorname{tg} \frac{\pi}{8})^2 - 2 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \quad (*)$$

$$\operatorname{tg} y = (\operatorname{tg} \frac{\pi}{8})^2 - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - y\right)$$

$$\frac{y}{\frac{\pi}{4}} = \frac{(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - y))}{1}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} (\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - y)) \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} (\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - y)) \end{cases}$$

10. $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$

$$\begin{aligned} A^3 &= \sqrt{5}+2 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)^2(\sqrt{5}-2)} - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5}+2 = 4 - 3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} (\sqrt{5}+2 + \sqrt{5}-2) = \\ &= 4 - 4 \cdot 3\sqrt[3]{5-4} = 4 - 4 \cdot 3\sqrt[3]{1} = 4 - 12 = -8 \end{aligned}$$

$$3A = 3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - 3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

$$A^3 - 3A = 4 - 4\sqrt[3]{2\sqrt{5}} - 3(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2})$$

7. $a_1 = \log_{10} 2$

$$\begin{cases} \lg(2^x - 1) = \lg 2 + d \\ \lg(2^x + 1) = \lg(2^x - 1) + d \end{cases} \quad | - | +$$

$$\lg(2^x - 1) - \lg(2^x + 1) = \lg 2 - \lg(2^x - 1)$$

$$2^x = a$$

$$\lg(a-1) - \lg(a+1) = \lg 2 - \lg(a-1)$$

$$\lg \frac{a-1}{a+1} = \lg \frac{2}{a-1} \quad ; \quad a \neq -1; \underline{a \geq 1}; a \neq 1$$

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{2}{a-1}$$

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{2}{a-1} = 0$$

$$\frac{a^2 - 2a + 1 - 2a - 2}{a^2 - 1} = 0 \quad a \neq \pm 1$$

$$a^2 - 4a - 1 = 0$$

$$D = 4 + 1 = 5$$

$$a = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$2^x = 2 + \sqrt{5}$$

$$2^x = 2 - \sqrt{5} < 0 ?$$

$$2^x = 2^{\log_2(2+\sqrt{5})} \quad 2^x = 2^{\log_2(2-\sqrt{5})}$$

$$x = \log_2(2+\sqrt{5}) \quad x = \log_2(2-\sqrt{5})$$

$$\text{Ответ: } \underline{\log_2(2 \pm \sqrt{5})}$$

$$\begin{cases} 2^x - 1 \geq 0 \\ 2^x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \geq 1 \\ 2^x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

ШИФР

3250

$$3. \frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-3x-3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{1-x}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \quad \checkmark$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -2); [-1; 1] \quad \checkmark$$

$$5. 8 \cdot 4^x + 1 \leq 6 \cdot 2^x$$

$$\boxed{2^x = a}$$

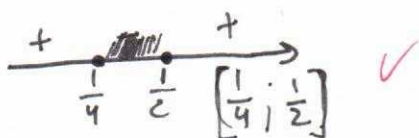
$$8a^2 + 1 - 6a \leq 0$$

$$\textcircled{1} 8a^2 + 1 - 6a \leq 0$$

$$D = 36 - 32 = 4$$

$$a = \frac{6 \pm 2}{16} = \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$$

$$8\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{1}{4}\right) \leq 0 \quad \checkmark$$



$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^{-1}$$

$$-2 \leq x \leq -1 \quad \checkmark$$

$$\text{Ответ: } [-2; -1]$$

$$4. \log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{11}{12} \quad \text{ОДЗ: } x > 0$$

$$\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\frac{11}{3} \log_3 x = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 x = \frac{1}{4}$$

$$\log_3 x = \log_3 \sqrt[4]{3}$$

$$x = \sqrt[4]{3}$$

$$\text{Ответ: } \sqrt[4]{3} \quad \checkmark$$

6. Пусть,

a - арифметическая п.

b - арифметическая п.

c - геометрическая п.

d - геометрическая п.

$$\begin{cases} d = 2b \\ c = 1,5d \\ a = c - 13 \\ a + b + c + d = 77 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$2b + 3b + 3b - 13 = 77$$

$$9b = 90$$

$$b = 10$$

$$\Rightarrow d = 20; c = 30; a = 17$$

Ответ: арифметическая п. - 17 членов
арифметическая п. - 10 членов
геометрическая п. - 30 членов
геометрическая п. - 20 членов