ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

$(ab)c=a(bc)$ $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

Класс 10 **Вариант** 7 **Дата Олимпиады** 11.02.17

Площадка написания МГТУ им. Н.Э. Баумана

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	3	5	5	10	10	10	15	—	—	63	шестьдесят три	

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

№1

$(x-1)(x-3)(x-5)=x(x^2-9)$

$(x-1)(x-3)(x-5)-x(x-3)(x+3)=0$

$(x-3)\big((x-1)(x-5)-x(x+3)\big)=0$

$x-3=0$ или $(x-1)(x-5)-x(x+3)=0$

$x=3$ $x^2-5x-x+5-x^2-3x=0$

$-9x=-5$

$x=\frac{5}{9}$

Ответ: $3;\ \frac{5}{9}$.

№2

$\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=2$ „возведем в квадрат на основе определения арифметического квадратного корня"

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 3x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 1$

$x-1+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}+3x+1=4$

$4x+2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4$

$2\sqrt{(x-1)(3x+1)}=4(x-1)-4(1-x)\ |:2$

$\sqrt{(x-1)(3x+1)}=2(1-x)$

$(x-1)(3x+1)=1-2x+x^2$

$3x^2+x-3x-1=1-2x+x^2$

$2x^2-2=0$

$2(x^2-1)=0$

$x^2-1=0$

$x-1=0$ $x+1=0$

$x=1$ $x=-1$ (не подходит по ОДЗ)

Ответ: 1

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

(ab)c=a(bc) $E=mc^2$

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

№3

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} \geq 0$$ ✓

$$\frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

1) $f(x) = \frac{2(x+2)-3(x+1)}{(x+1)(x+2)}$ ✓

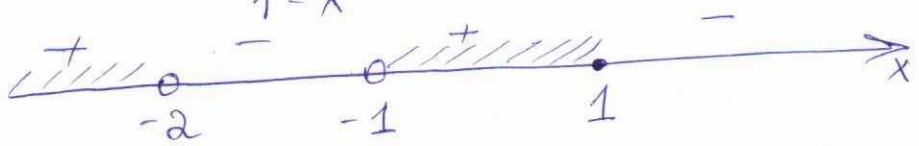
2) $D(f) = R \setminus \{-1; -2\}$

3) $f(x) = 0$; $2(x+2)-3(x+1)=0$

$2x+4-3x-3=0$

$1 = x$

4)



$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; 1]$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 1]$ ✓

№4

ОДЗ: $x > 0$ ✓

$$\log_3 X + \log_9 X + \log_{27} X = \frac{11}{12}$$

$$\log_3 X + \frac{1}{2}\log_3 X + \frac{1}{3}\log_3 X = \frac{11}{12}$$

Пусть $\log_3 X = t$, то

$$t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} = \frac{11}{12}$$

$$\frac{6t+3t+2t}{6} = \frac{11}{12}$$ ✓

$66 = 72t + 36t + 24t$

$66 = 132t$

$t = \frac{1}{2}$

$\log_3 X = \frac{1}{2}$

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

$x = \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$ ✓

№5

$8 \cdot 4^x + 1 \le 6 \cdot 2^x$

$8 \cdot 2^{2x} + 1 \le 6 \cdot 2^x$

Пусть $2^x = p$, то

$8p^2 + 1 - 6p \le 0$

$8p^2 - 6p + 1 \le 0$

$D = 36 - 32 = 4$

$p_1 = \frac{6-2}{16} = \frac{1}{4}$ ✓ $p_2 = \frac{1}{2}$ ✓



$\frac{1}{4} \le p \le \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \le 2^x \le \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} \le 2^x$ $\qquad$ $\frac{1}{2} \ge 2^x$

$2^{-2} \le 2^x$ $\qquad$ $2^{-1} \ge 2^x$

$x \ge -2$ $\qquad$ $x \le -1$



$x \in [-2; -1]$

Ответ: $[-2; -1]$ ✓

№6

Пусть кошек авторской породы $-x$, тогда сиамской $-2x$, персидской $-2x \cdot 1{,}5$, а сибирской $-2x \cdot 1{,}5 - 13$. Зная, что всего 77 кошек, составим и решим уравнение.

$x + 2x + 3x + 3x - 13 = 77$

$9x = 90$

$x = 10$ ✓

1) 10 кошек авторской породы
2) $10 \cdot 2 = 20$ кошек сиамских
3) $20 \cdot 1{,}5 = 30$ кошек персидских
4) $30 - 13 = 17$ кошек сибирской породы ✓

Ответ: 17; 10; 30; 20 кошек.

ГАЗПРОМ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

№7

$2^x - 1 > 0$
$2^x > 2^0$
$x > 0$
ОДЗ: $x > 0$ ✓

$\lg(2^x+1) - \lg(2^x-1) = \lg(2^x-1) - \lg 2$

$\lg\left(\frac{2^x+1}{2^x-1}\right) = \lg\left(\frac{2^x-1}{2}\right)$

$\frac{2^x+1}{2^x-1} = \frac{2^x-1}{2}$

Пусть $2^x = t$, то

$2t + 2 = t^2 + 1 - 2t$

$t^2 - 2t - 2t + 1 - 2 = 0$

$t^2 - 4t - 1 = 0$ ✓

$D = 16 + 4 = 20$

$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2}$ $\quad t_2 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2}$

$t_1 = 2 - \sqrt{5}$ $\quad t_2 = 2 + \sqrt{5}$

(не подходит) $\quad 2^x = 2 + \sqrt{5}$

$x = \log_2(2 + \sqrt{5})$

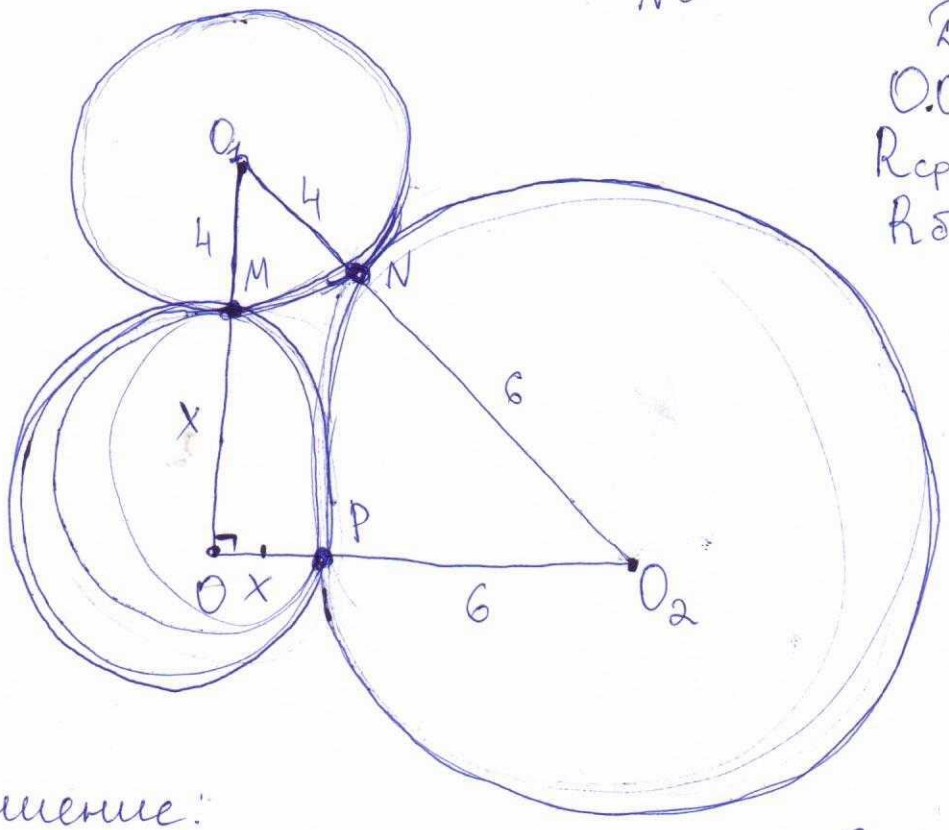
Ответ: $\log_2(2 + \sqrt{5})$ ✓

ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ГАЗПРОМ

Использовать только эту сторону листа, обратная сторона не проверяется!

ШИФР 4877

№8



Дано:
$O O_1 O_2$ – п/у Δ-к
$R_{ср} = 4$
$R_б = 6$

Найти:
$R_{мен.}$ – ?

Решение:

1) т.к. окружности попарно касаются в точках M, N, P

$O_1M = O_1N = 4$ ($OM = ON = R_{ср}$)

$OM = OP = X$ ($OM = OP = R_{мен.}$)

$O_2N = O_2P = 6$ ($O_2N = O_2P = R_{больш.}$)

2) По т. Пифагора:

$10^2 = (6+x)^2 + (4+x)^2$

$100 = 36 + 12x + x^2 + 16 + 8x + x^2$

$2x^2 + 20x - 48 = 0$

$x^2 + 10x - 24 = 0$

$x_1 = -12$ (не подходит)

$x_2 = 2$

$R_{меньш.} = 2$

Ответ: 2