

ШИФР 12141

Класс 9 Вариант 6 Дата Олимпиады 11.02.2017

Площадка написания КНИТУ

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	5	5	5	0	9	15	15	15	15	89	восемьдесят девять	Бену-девичи

№1

Пусть скорость наполнения бассейна первой трубой - $v_1 \frac{1}{2}$, второй - $v_2 \frac{1}{2}$.
 Объем бассейна V . t_1 - время, за которое первая труба
 наполняет бассейн. t_2 - время за которое вторая труба
 наполняет бассейн. Тогда:

$$t_1 = \frac{V}{v_1} \quad t_2 = \frac{V}{v_2}$$

По условию:

$$t_2 = t_1 + 6$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot V}{v_2}$$

$$t_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{v_2}$$

$$t_1 = \frac{1}{3} t_2$$

$$t_2 = 3t_1$$

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + 6 \\ t_2 = 3t_1 \end{cases}$$

$$3t_1 = t_1 + 6$$

$$2t_1 = 6$$

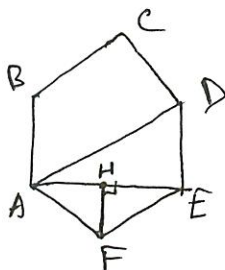
$$t_1 = 3 \text{ ч.}$$

Ответ: Первая труба наполняет бассейн за 3 часа

№2

Дано

ABCDEF - правильный.
шестиугол.



ABCDEF - правильный.
шестиуг.

↓

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \angle F =$$

$$= \frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 4 \cdot 30 = 120^\circ$$

ABCDEF - правильный. шестиугол.

↓

$$AB = BC = CD = DE = EF = AF$$

Т.к. в n-угольнике каждый угол
равен:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Проведём AE

$$\left. \begin{array}{l} \text{в } \triangle AEF \\ AF = EF \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AEF - \text{р/б.}$$

Биссектриса, высота и медиана,
опущенные из вершины F, совпадают.

Пусть FH - высота. Тогда она медиана и биссектриса.

↓

$$AH = EH = \frac{1}{2} AE$$

$$\angle AFH = \angle EFH = \frac{1}{2} \angle AFE = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{в } \triangle FHE'$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle FHE = 90^\circ \\ \angle EFH = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FEH = 30^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle FEH = 30^\circ \\ \angle FED = 120^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle AED = 90^\circ$$

Проведём AD

$$\angle AED = 90^\circ$$

↓
 $\triangle AED$ - прямоугол

↓ (биссектриса больше каждого из катетов)

$$AD > AE$$

ABCDEF - правильный. шестиугол.

↓

$$AD = CF = BE$$

$$AE = FD = CE = BD = AC = BF$$



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

12141

№2

Значит (т.к. $CF = BE = AD > EA = FD = CE = BD = AC = BF$)

AE — одна из наименьших диагоналей.

$$AE = 2\sqrt{3} \text{ ег.}$$

$$AH = HE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ ег.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AHF - \text{прямоуг.} \\ \angle FAE = \angle FEA = 30^\circ \\ (\text{т.к. } AFE - \text{равн.}) \end{array} \right\} \Rightarrow HF = \frac{1}{2} AF$$

$$AF = 2HF.$$

В $\triangle AHF$

по теореме Пифагора

$$AH^2 + HF^2 = AF^2$$

$$AH^2 + HF^2 = 4HF^2$$

$$(\sqrt{3})^2 = 3HF^2$$

$$3 = 3HF^2$$

$$HF^2 = 1$$

$$HF = 1$$

тогда

$$AF = 2HF = 2 \text{ ег.}$$

$$AF = FE = DE = CD = BC = AB = 2 \text{ ег.}$$

$$P_{ABCDEF} = AF + FE + DE + CD + BC + AB = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 \text{ ег.}$$

$$\text{Ответ: } P_{ABCDEF} = 12 \text{ ег.}$$

✓3

$$a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^8}}$$

$$a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$$

$$3 \cdot a^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot \sqrt[2]{a^3} = 3 \cdot \sqrt[6]{a^9}$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}}}{3 \cdot a^{\frac{3}{2}}} \right)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt[5]{a^8}} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{3 \cdot \sqrt[6]{a^9}} \right)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{\sqrt[6]{a^5}}{3 \cdot \sqrt[6]{a^8} \cdot \sqrt[6]{a^9}} \right)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \sqrt[6]{\frac{a^5}{a^8 \cdot a^9}} \right)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{3} \sqrt[6]{\frac{1}{a^{12}}} \right)^{-\frac{3}{5}} = \left(\frac{1}{3a^2} \right)^{-\frac{3}{5}} =$$

$$= (3a^2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(3a^2)^3} = \sqrt[5]{3^3 \cdot a^6}$$

При $a=9$

$$\sqrt[5]{3^3 \cdot 9^6} = \sqrt[5]{3^3 \cdot (3^2)^6} = \sqrt[5]{3^3 \cdot 3^{12}} = \sqrt[5]{3^{15}} = 3^3 = 27$$

Ответ! При $a=9$ ~~значение~~ значение выражения 27.

✓4

Посмотрим на выражение $(x^2 - 10x + 21)$

$$x^2 - 10x + 21 = x - 7x - 3x + 21 = x(x-7) - 3(x-7) = (x-3)(x-7)$$

Посмотрим на функцию

$$y = \frac{(x^2 - 10x + 21)(x-6)}{x-3} = \frac{(x-3)(x-7)(x-6)}{(x-3)}$$

Заметим, что $x \neq 3$. Тогда мы можем сократить $(x-3)$ в числителе и в знаменателе, т.к. $(x-3)$ ненулевое число и после сокращения останется ~~выражение~~ ~~равное~~ первоначальному ~~выражению~~ ~~выражению~~

№4

$$y = \frac{(x-3)(x-7)(x-6)}{(x-3)} = (x-7)(x-6) = x^2 - 7x - 6x + 42$$

$$y = x^2 - 13x + 42$$

эскиз

Построим $\checkmark$ этот графика

~~вот это парабола~~

ветви направлены вверх.

Координаты вершины:

$$x_B = \frac{-(-13)}{2 \cdot 1} = \frac{13}{2}$$

$$y_B = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 13 \cdot \frac{13}{2} + 42 = \frac{169}{4} - \frac{169}{2} + 42 = \frac{169 - 2 \cdot 169}{4} + 42 =$$

$$= -\frac{169}{4} + 42 = -42 \frac{1}{4} + 42 = -\frac{1}{4}$$

Точка пересечения с ~~то~~ осью x :

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$(x-7)(x-6) = 0$$

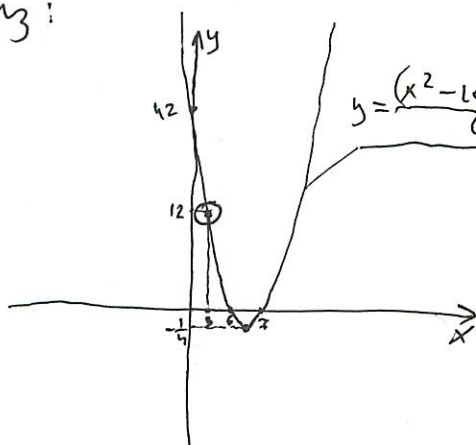
$$x = \{6; 7\}$$

Точки: $(6; 0)$ и $(7; 0)$

Точка пересечения с осью y :

$$y = 0^2 - 13 \cdot 0 + 42 = 42 \quad \text{точка } (0; 42)$$

Строим эскиз:



Важно: $x \neq 3$, т.е.

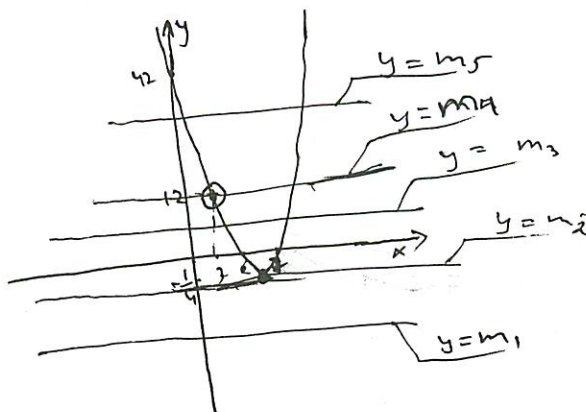
$$y = 3^2 - 13 \cdot 3 + 42 = 9 - 39 + 42 =$$

$$= 12$$

т.е. точка $(3; 12)$ не принадлежит графику

№4

Заметим, что прямая $y = m$ — это прямая, параллельная оси x .
Посмотрим на эскиз графика



При $m_1 \in (-\infty; -\frac{1}{4})$ прямая $y = m_1$ не имеет общих точек с графиком.

При $m_2 = -\frac{1}{4}$ прямая $y = m_2$ имеет ровно 1 общую точку с графиком.

При $m_3 \in (-\frac{1}{4}; 12)$ прямая $y = m_3$ имеет ровно 2 общие точки с графиком.

При $m_4 = 12$ прямая $y = m_4$ имеет ровно 1 общую точку с графиком.

При $m_5 \in (12; +\infty)$ прямая $y = m_5$ имеет ровно 2 общие точки с графиком.

Ответ: При $m \in \{-\frac{1}{4}; 12\}$ прямая $y = m$ имеет ровно 1 общую точку с графиком

$$y = \frac{(x^2 - 10x + 21)(x - 6)}{(x - 3)}$$

✓5

П: 1

О: 7 *погешу?*

Л: 8

Е: 9

Т: 4

ПОЛЕТ : 2 = ЛЕТО

~~17894 : 2 = 8947~~

$$\begin{array}{r} 17894 \overline{) 2} \\ -16 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 9 \\ -8 \\ \hline 14 \\ -14 \\ \hline 6 \end{array}$$

ПОЛЕТ: 2 ЛЕТО
17894 : 2 = 8947

✓6

Допустим, что в классе n учеников, а k из них повысят успеваемость. Тогда процент равен:

$$\frac{k}{n} \cdot 100$$

Заметим, что это число больше ^{тоб равно} $\frac{1}{n} \cdot 100$.

$$\frac{k}{n} \cdot 100 \% \gg \frac{1}{n} \cdot 100 \% \quad \text{т.к. } k \geq 1$$

Значит для числа n , минимальный процент, это $\frac{1}{n} \cdot 100 \%$

Посмотрим на ряд чисел:

$$1 < 2 < 3 < \dots < 30 < 31.$$

Поделим 1 на каждое из этих чисел, и получим.

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{30} > \frac{1}{31}$$

Умножим на 100%.

$$\frac{1}{1} \cdot 100 \% > \frac{1}{2} \cdot 100 \% > \dots > \frac{1}{30} \cdot 100 \% > \frac{1}{31} \cdot 100 \%$$

№ 6

Посмотрим на число $\frac{1}{31} \cdot 100\%$

$$\begin{array}{r}
 100,00 \overline{) 31} \\
 \underline{93} \\
 70 \\
 \underline{62} \\
 80 \\
 \underline{62} \\
 18
 \end{array}$$

Значит число $\frac{1}{31} \cdot 100\% > 3,2\%$

Значит:

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{30} > \frac{1}{31}$$

$$\frac{1}{1} \cdot 100\% > \frac{1}{2} \cdot 100\% > \dots > \frac{1}{30} \cdot 100\% > \frac{1}{31} \cdot 100\% > 3,2\%$$

Значит для $n \in \{1, 2, \dots, 31\}$ минимальный процент учеников, которые повысят успеваемость больше $3,2\%$.
Значит и любой другой процент больше $3,2\%$.

Значит эти числа не подходят

Если в классе 32 ученика и 1 повысил успеваемость, то процент:

$$\frac{1}{32} \cdot 100\% = \frac{100}{32} \%$$

$$\begin{array}{r}
 100,00 \dots \overline{) 32} \\
 \underline{96} \\
 40 \\
 \underline{32} \\
 80 \\
 \underline{64} \\
 16 \dots
 \end{array}$$

$$\text{Значит } 3,2 > \frac{100}{32} \% > 3,1$$

Значит ~~32~~ 32 - это минимальное кол-во учеников в классе

Ответ: 32 учеников

✓ 7

$$|2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2}| + (y^2-4y+x^2+2x-21)^2 = 0$$

$$|2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2}| \geq 0$$

$$(y^2-4y+x^2+2x-21)^2 \geq 0$$

причем равенство достигается,
когда выражение под знаком
и выражение под знаком
квадрата равны нулю.

$$|2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2}| + (y^2-4y+x^2+2x-21)^2 \geq 0$$

Значит, чтобы выражение было равно 0,
нужно, чтобы каждое слагаемое было равно нулю

$$\begin{cases} 2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2} = 0 & 1) \\ y^2-4y+x^2+2x-21 = 0 & 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+y-\sqrt{x^2-2xy+y^2} = 0 & 1) \\ y^2-4y+x^2+2x-21 = 0 & 2) \end{cases}$$

$$1) \quad 2+y = \sqrt{x^2-2xy+y^2}$$

$$2+y = \sqrt{(x-y)^2}$$

$$2+y = |x-y|$$

$$a) \quad y \geq x$$

$$2+y = y-x$$

$$x = -2$$

$$2) \quad y^2-4y+(-2)^2+2(-2)-21=0$$

$$y^2-4y+4-4-21=0$$

$$y^2-4y-21=0$$

$$D = (-4)^2 + 4 \cdot 21 = 16 + 84 = 100$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} = 2 \pm 5$$

$$y_1 = 2+5 = 7 \quad y_2 = 2-5 = -3$$

Проверяем:

$$(-2; 7) \text{ и } (-2; -3)$$

Но $(-2, -3)$ не подходит,
т.к. $-3 < -2$ ($y \geq x$)

Но $(-3, 2, -2, 6)$ не подходит,
т.к. $-3, 2 < -2, 6$ ($x > y$)

$$b) \quad x > y$$

$$2+y = x-y$$

$$x = 2y+2$$

$$y^2-4y+(2y+2)^2+2(2y+2)-21=0$$

$$y^2-4y+4y^2+8y+4+4y+4-21=0$$

$$5y^2+8y-13=0$$

$$D = 8^2 + 5 \cdot 4 \cdot 13 = 64 + 260 = 324 = 18^2$$

$$y_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 5} = \frac{-8 \pm 18}{10}$$

$$y_1 = \frac{-8+18}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$y_2 = \frac{-8-18}{10} = \frac{-26}{10} = -2,6$$

Проверяем:

$$x_1 = 2y_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

$$x_2 = 2y_2 + 2 = 2 \cdot (-2,6) + 2 = -5,2 + 2 = -3,2$$

$$\text{Проверяем: } 5, 2+2 = -3,2$$

$$(4; 1) \text{ и } (-3, 2) + 2, 6$$

~~Ответ: $(-2, 7), (-2, -3), (4, 1)$~~
 Ответ: $(-2, 7), (4, 1)$

№ 8

$$\frac{3x}{2x^2 - 10x + 14} + \frac{4x}{2x^2 - 8x + 14} = 1$$

Заметим:

$$2x^2 - 10x + 14 = a$$

Тогда:

$$2x^2 - 10x + 14 = a - x$$

$$2x^2 - 8x + 14 = a + x$$

Заметим, что оба знаменателя ненулевые:

$$2x^2 - 10x + 14 \neq 0$$

$$x^2 - 5x + 7 \neq 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 7 = 25 - 28 = -3 < 0$$

↓
корней нет.

$$2x^2 - 8x + 14 \neq 0$$

$$x^2 - 4x + 7 \neq 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 7 = 16 - 28 = -12 < 0$$

↓
корней нет.

$$\frac{3x}{a-x} + \frac{4x}{a+x} = 1$$

Умножим все на $(a-x)(a+x)$
 Мы можем это сделать,
 т.к. они не равны нулю
 $(a-x \neq 0; a+x \neq 0)$

$$3x(a+x) + 4x(a-x) = (a-x)(a+x)$$

$$3xa + 3x^2 + 4xa - 4x^2 = a^2 - x^2$$

$$7xa - x^2 = a^2 - x^2$$

$$7xa = a^2$$

~~Скратим на a , т.к. $a \neq 0$~~
~~Докажем себе, что~~

Заметим, что $a \neq 0$

$$a \neq 0$$

$$2x^2 - 8x + 14 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 14 = 64 - 112 = -48 < 0$$

↓
корней нет.

№8

$$7ax = a^2$$

Сократим на a , т.к. $a \neq 0$

$$7x = a$$

$$2x^2 - 9x + 14 = 7x$$

$$2x^2 - 16x + 14 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = 4 \pm 3$$

$$x_1 = 4 + 3 = 7 \quad x_2 = 4 - 3 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 7 + 1 = 8$$

Ответ: 8

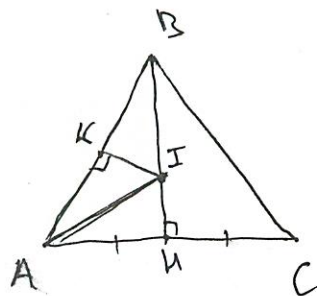
№9

Дано

$\triangle ABC$ - р/б.

$AB = BC = 10 \text{ см}$

$AC = 16 \text{ см}$.



Проведём высоту BH

т.к. $\triangle ABC$ - р/б

BH - это высота, бисс. и медиана.

↓

$$AH = CH = \frac{1}{2} AC = 8$$

$\triangle AHB$ - прямоуго.

По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

в $\triangle CHB$

$$\sin \angle CBH = \frac{BH}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$$

в $\triangle ABC$

По теореме синусов

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

, где R - радиус
опис. окр.

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2 \cdot \sin \angle ACB} = \frac{10}{2 \cdot 0,6} = \frac{5}{\frac{6}{10}} = \frac{5}{\frac{3}{5}} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} \text{ см.}$$

т.к. BH - бисс., то I, центр вписанной окружности лежит на ней (т.к. центр впис. окр. это точка пересечения бисс.)

Отметим эту точку.

Опустим перпендикуляр IK из точки I на AB.

ИК = ИН, т.к. впис. окр. касается сторон $\triangle ABC$, значит

AC - касательная к окр, значит прямая образованная центром окр. и точкой касания перпендикулярна касательной, и является радиусом. То же для стороны AB

№9

Обозначим: $IK = IH = x$.

Тогда: $BI = BH - IH = 6 - x$

Проведем AK

$\triangle IKB$ - прямоугольный

По теореме Пифагора:

$$IK^2 + BK^2 = BI^2$$

$$x^2 + 2^2 = (6 - x)^2$$

$$x^2 + 4 = x^2 + 36 - 12x$$

$$12x = 32$$

$$x = \frac{32}{12} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Значит радиус вписанной окружности равен $2\frac{2}{3}$

$$r = 2\frac{2}{3}$$

$$R + r = 2\frac{2}{3} + 8\frac{1}{3} = 11 \text{ см.}$$

Ответ: 11 см.

$\triangle AKI$ и $\triangle AHI$ прямоугольные.
 AI - общ.
 $KI = IK$

$$\triangle AHI = \triangle AKI$$

$$AI = AK = 8 \text{ см.}$$

$$BK = AB - AK = 10 - 8 = 2 \text{ см.}$$

✓ 10

$$m_1 = 150 \text{ кг}$$

$$m_2 = 250 \text{ кг}$$

для 1:

40% олова

для 2:

26% меди

для обз.

30% цинка

Допустим, что в каждом из сплавов $x\%$ цинка.

тогда: m_{z1} — масса цинка в 1 сплаве.

m_{z2} — масса цинка во 2 сплаве

$$m_{z1} = \frac{x \cdot 150}{100} = 1,5x \text{ кг}$$

$$m_{z2} = \frac{x \cdot 250}{100} = 2,5x \text{ кг}$$

m_z — масса цинка в обоих сплавах

$$m_z = m_{z1} + m_{z2} = 1,5x + 2,5x = 4x \text{ кг}$$

Процентное содержание цинка в обоих сплавах

$$30\% = \frac{m_z}{m_1 + m_2} \cdot 100\% = \frac{4x \cdot 100}{400} = x$$

$$x = 30\%$$

Значит во втором сплаве 30% ~~о~~ цинка и 26% меди. Значит олова там:

$$100\% - 26\% - 30\% = 44\%$$

m_{o1} — масса олова в первом сплаве

m_{o2} — масса олова во втором сплаве.

$$m_{o1} = \frac{40\% \cdot 150 \text{ кг}}{100\%} = 60 \text{ кг}$$

$$m_{o2} = \frac{44\% \cdot 250 \text{ кг}}{100\%} = 110 \text{ кг}$$

m_o — масса олова в обоих сплавах

$$m_o = m_{o1} + m_{o2} = 60 \text{ кг} + 110 \text{ кг} = 170 \text{ кг}$$

Значит масса олова в новом сплаве 170 кг.

Ответ: 170 кг, олова